

# SONDAS INTERPLANETARIAS<sup>(\*)</sup>

Por I. DA-RIVA, E. FRAGA y A. LIÑAN

Instituto Nacional de Técnica Aeroespacial  
«Esteban Terradas».

## Introducción.

*En este artículo se estudian los parámetros de lanzamiento de las sondas que pueden escapar de la esfera de influencia de la Tierra y se mueven principalmente bajo la atracción del Sol. Obtendremos una serie de relaciones sencillas que permitan, con aproximación razonable, la rápida estimación de las condiciones de lanzamiento necesarias para llevar a cabo una misión espacial determinada.*

*La teoría presentada aquí es aplicable a una amplia gama de misiones espaciales. Es en particular aplicable a misiones de interceptación de cometas, que exigen métodos aproximados sui géneris. Un cometa tiene una órbita en principio desconocida, no necesariamente poco inclinada respecto a la Eclíptica, que ha de determinarse mediante una serie de observaciones con suficiente antelación.*

*Describiremos primeramente el movimiento de la Tierra alrededor del Sol. A continuación haremos uso del método de Cónicas empalmadas para estudiar el movimiento de la Sonda. Primeramente utilizaremos un sistema de coordenadas geocéntrico inercial, con lo cual la atracción del Sol queda aproximadamente compensada por las fuerzas de inercia del sistema de referencia cerca de la Tierra (dentro de la esfera de influencia de la Tierra); la sonda describirá una hipérbola de escape. A continuación (después de abandonar la esfera de influencia de la Tierra) y en un sistema de coordenadas inercial heliocéntrico la sonda describirá una cónica kepleriana alrededor del Sol. Las condiciones de inyección en esta segunda órbita se determinarán por empalme adecuado con las condiciones asintóticas de la hipérbola de escape.*

*Por último, presentaremos una teoría linealizada del vuelo interplanetario que simplifica la determinación de los parámetros de lanzamiento para alcanzar un blanco determinado. Como aplicación de este trabajo se hará un análisis del vuelo espacial del Pioneer V.*

## 1. Movimiento de la Tierra alrededor del Sol.

El plano de la órbita es, por definición, el plano de la Eclíptica. Los parámetros fundamentales, que determinan su movimiento y que se enumeran a continuación están obtenidos de la Ref. 1.

---

(\*) En este artículo se resume una parte del informe presentado a la COPERS como consecuencia del Contrato INTA-COPERS 7-63 (Ref. 5).

Distancia media Sol-Tierra (semi-eje mayor) .	$r_{\oplus} = a$	1.A.U. = $1.49,4 \times 10^8$ Km.
Perihelio.	$r_p$	0,983273 A.U.
Afelio.	$r_a$	1,016727 A.U.
Excentricidad.	$e$	0,0167272
Longitud del perihelio.	$\omega$	$102^{\circ} 12' 32''$
Longitud de la Tierra en 1 de enero de 1957.	$L_0 = \Sigma_{\oplus}$	$99^{\circ} 53' 19,15''$
Inclinación respecto al Ecuador.	$\epsilon$	$23^{\circ} 26' 59''$
Movimiento sideral diario medio.	$n$	3548,193 seg./día.
Velocidad orbital media.	$V_{\oplus}$	29,77 Km./seg.
Parámetro gravitatorio del Sol.	$\tau_{\oplus}$	$1,324948 \times 10^{11}$ Km. <sup>3</sup> /seg. <sup>3</sup>

La anomalía media,  $M$ , viene dada por:

$$M = n t ,$$

donde  $n = \sqrt{\mu} \cdot a^{-3/2}$  es el movimiento sideral diario medio.

## 2. Esfera de influencia de la Tierra.

Dado que en las proximidades de la Tierra la aceleración debida a la atracción del Sol es casi la misma para la Sonda que para la Tierra, podemos suponer, que si utilizamos un sistema de coordenadas inercial geocéntrico (con ejes de direcciones fijas) la atracción del Sol puede equilibrarse aproximadamente con las fuerzas de inercia del sistema de referencia. Por tanto, hacemos la hipótesis de que al estudiar el movimiento de la Sonda cerca de la Tierra (en la esfera de influencia de la Tierra) pueden obtenerse buenos resultados aproximados despreciando la atracción del Sol, si utilizamos un sistema de coordenadas inercial geocéntrico.

En la Ref. 2 se calcula el radio de la esfera de influencia de la Tierra igualando las aceleraciones de perturbación relativas producidas por el Sol y la Tierra en el movimiento de la Sonda cuando ésta se encuentra cerca y lejos de la Tierra, respectivamente:

$$\frac{a_{p,E} - a_{s,E}}{a_{p,s}} \sim \frac{a_{p,s} - a_{E,s}}{a_{p,E}}, \quad [1]$$

donde  $a_{s,E}$  por ejemplo, es la aceleración (por supuesto, despreciable) producida en el Sol por la atracción de la Tierra.

De la ecuación [1] se puede deducir el radio  $r_i$  de la esfera de influencia de la Tierra:

$$r_i/r_{\oplus} \sim (m_L/m_S)^{2/5} \sim 0,006, (r_i \sim 900000 \text{ km}),$$

y la aceleración de perturbación relativa, en el contorno de la esfera de influencia es:

$$\frac{a_{p,s} - a_{E,s}}{a_{p,E}} \sim (m_E/m_S)^{1/5} \sim 0,07 .$$

Los valores correspondientes para la Luna de los que acabamos de obtener son, 0,15 y 0,3, respectivamente.

En la Ref. 2 se comparan los resultados exactos, con los obtenidos para sondas lunares empalmando, en la superficie de la esfera de influencia de la Luna, las dos cónicas keplerianas que describen el movimiento de la Sonda, cerca y lejos de la Luna, respectivamente.

En las Ref. 3 y 4 puede verse que para el problema restringido de los tres cuerpos (en nuestro caso, Sonda, Tierra y Sol) al despreciar la atracción de la Tierra en el movimiento de la Sonda si ésta no está próxima a la Tierra, los errores son del orden de  $m = m_E / (m_E + m_s)$ . (Suponiendo que la órbita se estudia en el intervalo de un año, y todas las longitudes vienen dadas en A. U.)

Cuando la Sonda está a una distancia menor que  $m$  de la Tierra, su movimiento puede estudiarse, en primera aproximación, despreciando la atracción del Sol. Si se utiliza un sistema de coordenadas inercial geocéntrico, los errores son entonces del orden de  $m r \sim o(m^2)$ . Las condiciones iniciales deberán conocerse con la misma aproximación.

Si la Sonda se lanza desde la Tierra, podemos suponer que las condiciones de inyección se conocen con la exactitud necesaria; no obstante, cuando la Sonda se acerca a la Tierra desde el espacio exterior, la velocidad, y lo que es más importante, la posición de la asíntota de aproximación deberá conocerse con un error  $o(m^2)$  a lo sumo. Este hecho nos obliga a tener en cuenta la atracción de la Tierra, en primera aproximación, cuando estudiamos el movimiento de la Sonda lejos de la Tierra bajo la atracción solar.

Este trabajo es un estudio exploratorio sobre el movimiento de las sondas lanzadas desde la Tierra (sin tratar de determinar el movimiento de la Sonda después de su paso cerca de otro planeta). Por tanto, de acuerdo con lo dicho haremos lo siguiente:

a) Despreciar la atracción del Sol en la fase hiperbólica de ascenso partiendo de la Tierra (utilizando, por supuesto, un sistema de coordenadas geocéntrico inercial).

b) Despreciar la atracción de la Tierra cuando estudiamos el movimiento de la Sonda lejos de la Tierra. En este caso el sistema de coordenadas será inercial heliocéntrico. Para establecer las condiciones iniciales en esta fase del movimiento de la Sonda, supondremos que la Sonda parte del centro de la Tierra en el instante de lanzamiento y con una velocidad igual a la orbital de la Tierra más la velocidad asíntótica de la Sonda en su movimiento de escape desde la Tierra y relativa a ella.

### 3. Órbita hiperbólica de ascenso.

Utilizando un sistema de referencia inercial geocéntrico podremos despreciar la atracción del Sol cuando estudiemos el movimiento de la Sonda en la fase de órbita hiperbólica de ascenso.

El problema consiste en determinar la órbita de una Sonda que se lanza desde un punto dado de la Tierra, así como el escape desde la Tierra en una dirección definida por  $\alpha_T$ ,  $\delta_T$  y con una velocidad dada  $V_A$ . Esta dirección y velocidad se determinarán después al estudiar las condiciones óptimas de inserción de la Sonda en el movimiento heliocéntrico.

Despreciaremos los efectos debidos al achatamiento de la Tierra y la resistencia del aire, reduciendo el problema, en la fase balística del movimiento de la Sonda a un problema restringido de dos cuerpos.

Supondremos que toda la órbita de ascenso está en el mismo plano. Esta trayectoria incluye una fase inicial propulsada, una órbita circular de espera y una segunda órbita propulsada para la inyección final en la órbita de ascenso hiperbólica balística.

Todo lo dicho en el artículo "Sondas lunares" (Ref. 5) acerca de las restricciones geométricas, es válido para las órbitas hiperbólicas. En particular las figuras 4 y 5 de dicho artículo nos sirven para determinar el acimut de lanzamiento y el ángulo total central de viaje en función de la dirección radial exterior de la asíntota de escape y de la posición del punto de lanzamiento en el momento de lanzamiento.

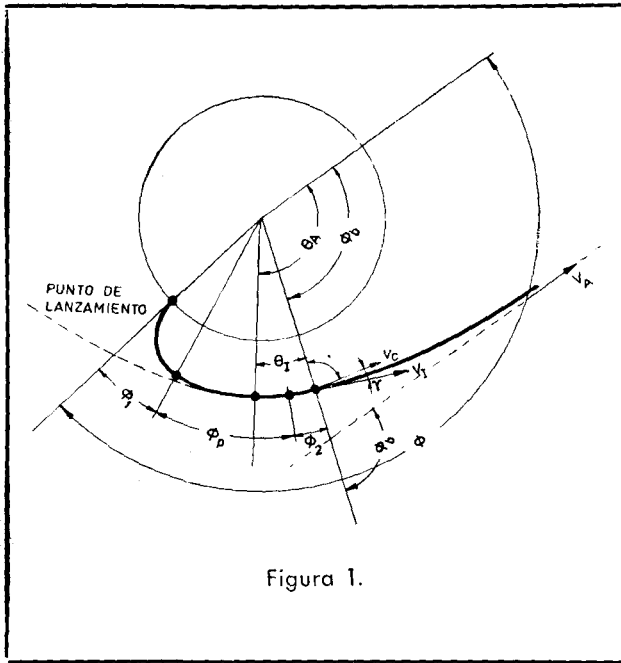


Figura 1.

Además, lo dicho acerca de las ventajas de la órbita de espera, en el caso de órbitas lunares, es fácilmente adaptable al caso de órbitas interplanetarias.

En este caso, sin embargo, la dirección del blanco está perfectamente determinada en la mayoría de los casos por consideraciones de tiempo o energía en el movimiento elíptico alrededor del Sol, no pudiéndose esperar, como podía hacerse en el caso de la Luna a la época del mes lunar más favorable para la trayectoria de ascenso.

El ángulo total central de viaje que aparece en la figura 1 es la suma de los ángulos  $\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_p + \Phi_a$ . De estos  $\Phi_1$  y  $\Phi_2$  son fijos y dependen de las características del vehículo lanzador. El ángulo  $\Phi_p$  mide el recorrido a lo largo de la órbita de espera y podemos variar su magnitud, de acuerdo con las restricciones dinámicas para maximizar la carga de pago. El ángulo  $\Phi_a$  es el ángulo central balístico que determinaremos a continuación en función de la velocidad de inyección  $V_1$  y del ángulo de elevación  $\gamma$ . Mediante el uso de las va-

riables adimensionales convenientes esta relación será válida para cualquier altura de inyección (y para cualquier planeta).

La velocidad de inyección  $V_1$  es el vector suma de la velocidad de inyección, respecto a ejes ligados a la Tierra y la velocidad debida a la rotación de la Tierra. Esta condición nos induciría, en lo posible, a hacer lanzamientos hacia el Este y lo más cerca posible del Ecuador.

En el plano de la órbita de ascenso la trayectoria balística será una hipérbola de Kepler.

Utilizaremos las siguientes variables adimensionales:

$\rho = \frac{r}{r_1}$  es la distancia adimensional al centro de la Tierra (los subíndices I indican condiciones de inyección)  $v = V/V_c$  es la velocidad adimensional; siendo  $V_c$  la velocidad circular a la altura de inyección;  $v_a$  es la velocidad asintótica adimensional. El subíndice  $p$  expresa condiciones en el perigeo. Siendo la anomalía verdadera como siempre  $\theta$ .

Para cualquier altura y planeta se tienen las siguientes relaciones:

Ecuación de la energía:

$$v_1^2 = 2 + v_a^2 = v_p^2 + 2 \left( 1 - \frac{1}{\rho_p^2} \right). \quad [1]$$

Cantidad de movimiento angular:

$$v_1 \cos \gamma = v_p \rho_p. \quad [2]$$

De las ecuaciones [1] y [2]:

$$(v_1^2 - 2) \rho_p^2 + 2 \rho_p - v_1^2 \cos^2 \gamma = 0. \quad [3]$$

La hipérbola viene dada por:

$$\rho = \rho_p (1 + e) / (1 + e \cos \theta). \quad [4]$$

En particular:

$$\rho_p (1 + e) = 1 + e \cos \theta_1, \quad [5]$$

y también:

$$e \sin (\theta_1 - \gamma) = \sin \gamma. \quad [5, a]$$

$$\cos \theta_a = -\frac{1}{e}. \quad [6]$$

El ángulo balístico central  $\Phi_b$  viene dado por:

$$\Phi_b = \theta_A - \theta_1. \quad [7]$$

A fin de calcular  $\Phi_b$  en función de  $\gamma$  y  $v_1$ , resolveremos primeramente la ecuación [3] para calcular  $e$ , y por medio de la relación:

$$e = \sqrt{1 + v_1^2 (v_1^2 - 2) \cos^2 \gamma}. \quad [8]$$

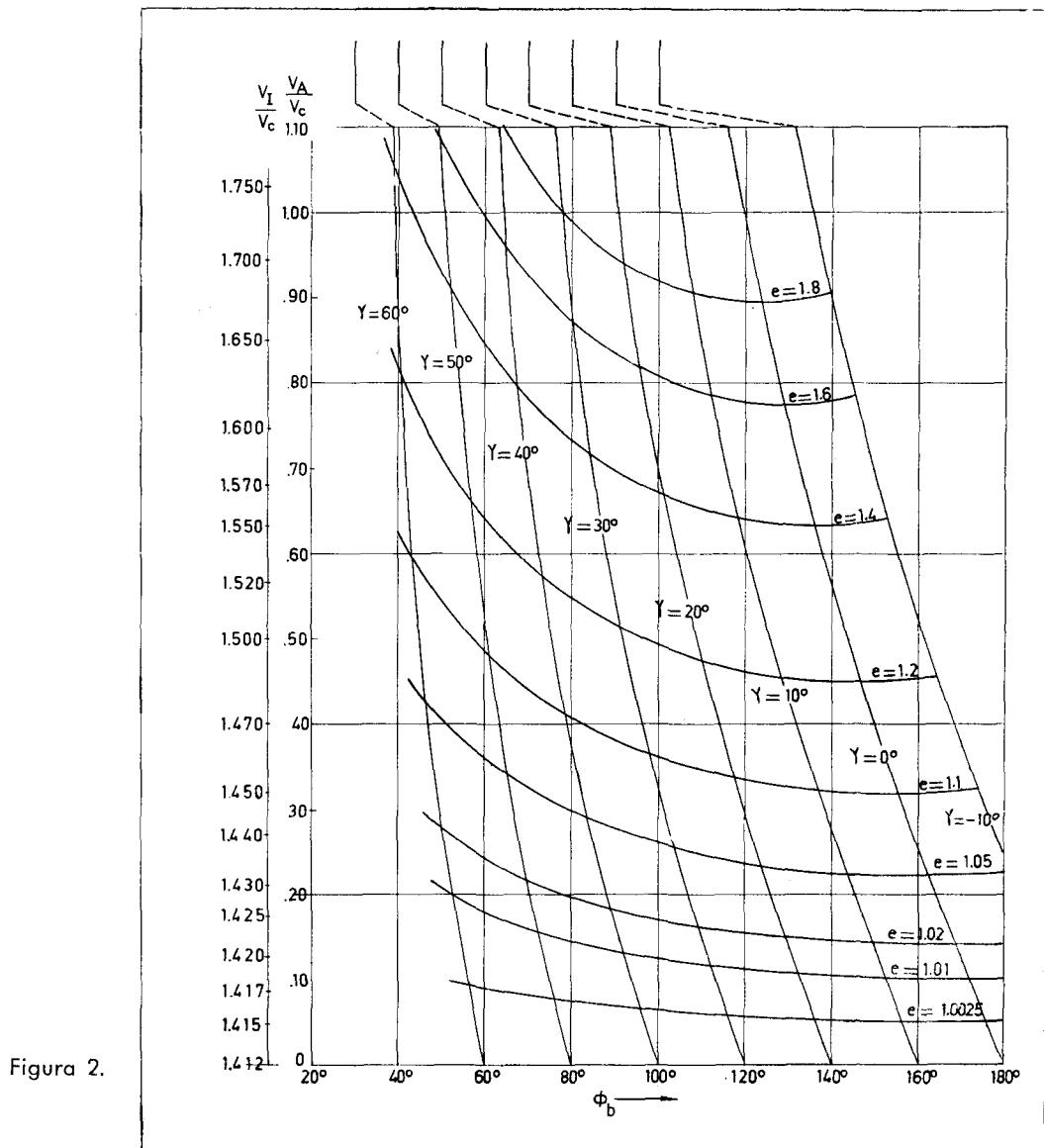
calculamos la excentricidad  $e$ , y utilizando [5], [6] y [7] determinamos  $\Phi_b$ . La figura 2 muestra la relación entre  $\Phi_b$ ,  $\gamma$  y  $v_1$  obtenida por este procedimiento:

$$v_1^4 \cos^2 \gamma (\cos^2 \gamma + \cos \Phi_b - 1) + 2 v_1^2 \cos^2 \gamma \cos \Phi_b (1 - \cos \Phi_b) + (1 - \cos \Phi_b)^2 = 0. \quad [9]$$

En particular para  $\gamma = 0$ :

$$\Phi_b = \pi - \arccos [1/(v_1^2 - 1)]. \quad [10]$$

En la figura 2 se han dibujado las líneas de excentricidad constante.



La trayectoria balística hiperbólica viene dada por:

$$\rho = v_i^2 \cos^2 \gamma / (1 + e \cos \theta). \quad [11]$$

Para velocidades de inyección  $v_i$ , ligeramente superiores a la velocidad parabólica  $v_p$ , la velocidad asintótica  $v_A$  será pequeña. En este caso podemos escribir:

$$\rho_p = \cos^2 \gamma + (v_A^2/8) \sin^2 2\gamma + 0(v_A^4); \quad [12]$$

$$e = 1 + v_A^2 \cos^2 \gamma + (v_A^4/8) \sin^2 2\gamma + 0(v_A^6); \quad [13]$$

$$\theta_i = 2\gamma - (v_A^2/2) \sin 2\gamma + 0(v_A^4); \quad [14]$$

$$\theta_A = \pi - v_A \sqrt{2} \cos \gamma + (v_A^3/6) (3 \cos 2\gamma + 2 \cos^2 \gamma) + 0(v_A^5); \quad [15]$$

$$\Phi_b = \pi - 2\gamma - v_A \sqrt{2} \cos \gamma + (v_A^3/2) \sin 2\gamma + (v_A^3/\sqrt{6}) (3 \cos 2\gamma + 2 \cos^2 \gamma) + 0(v_A^4). \quad [16]$$

#### 4. Órbita interplanetaria.

##### 4.1. Condiciones iniciales y finales.

Después de abandonar la esfera de influencia de la Tierra, la Sonda se halla sometida, en primera aproximación, únicamente a la atracción del Sol; y describiendo en un sistema heliocéntrico inercial una trayectoria elíptica kepleriana.

Para obtener las condiciones iniciales de esta trayectoria kepleriana, supondremos que la Sonda inicia su movimiento en la posición del centro de la Tierra en el momento de lanzamiento y con una velocidad igual al vector suma de la velocidad orbital de la Tierra y la velocidad asintótica de escape de la Sonda respecto la Tierra. Esta velocidad asintótica se define por su magnitud  $V_A$ , y su dirección, dada por las coordenadas  $\delta_\varepsilon$  (ángulo entre la velocidad asintótica  $V_A$  y el plano de la Eclíptica) y  $\lambda_\varepsilon = \Sigma_\oplus - \alpha_\varepsilon + \pi/2$  (ángulo entre la proyección de  $V_A$  sobre la Eclíptica y la velocidad orbital de la Tierra) (ver figura 3).

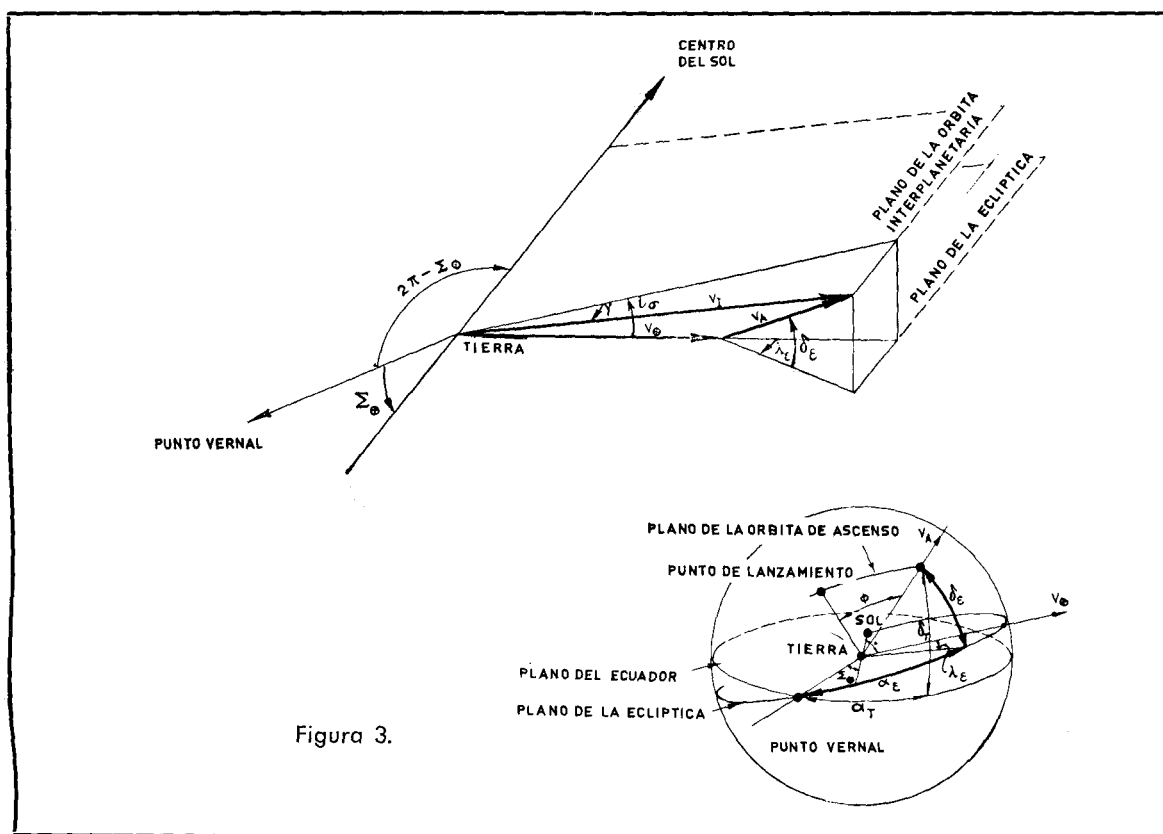


Figura 3.

La posición de la Tierra vista desde el Sol viene dada por el ángulo  $\Sigma_{\oplus}$  entre las líneas Tierra-Punto Vernal y Sol-Tierra. Se supone que la órbita de la Tierra es circular con  $r_{\oplus} = 1$  A. U., velocidad orbital:

$$V_{\oplus} = 29,77 \text{ Km./seg. y } \Sigma_{\oplus} = 2\pi t,$$

siendo  $t$  en años el tiempo transcurrido desde el paso de la Tierra por el Punto Vernal (21 de septiembre).

Las coordenadas con respecto a la Eclíptica  $\alpha_{\varepsilon}$ ,  $\delta_{\varepsilon}$  de la dirección radial exterior, pueden obtenerse en función de  $\alpha_T$  y  $\delta_T$  (coordenadas con respecto al Ecuador) utilizando la transformación (fig. 4).

Las condiciones de inyección de la Sonda en su órbita interplanetaria heliocéntrica se pueden determinar como sigue:

La velocidad de inyección de la Sonda,  $v_I$ , en su órbita, está dada por:

$$v_I^2 = 1 + 2v_a \cos \delta_{\varepsilon} \cos \lambda_{\varepsilon} + v_a^2, \quad [17]$$

donde

$$v_I = V_I/V_{\oplus} \quad v_a = V_a/V_{\oplus}.$$

El ángulo de elevación  $\gamma$  ( $\pi/2 - \gamma$  es el ángulo entre  $V_I$  y la línea Tierra-Sol) (figura 3) está dado por:

$$\sin \gamma = (v_a/v_I) \cos \delta_{\varepsilon} \sin \lambda_{\varepsilon}, \quad [18]$$

y la inclinación  $i_{\sigma}$  del plano de la órbita con relación a la Eclíptica por:

$$\operatorname{tg} i_{\sigma} = v_a \sin \delta_{\varepsilon} / (1 + v_a \cos \delta_{\varepsilon} \cos \lambda_{\varepsilon}). \quad [19]$$

El blanco, por otra parte, estará definido por su posición en el instante de llegada de la Sonda, respecto a un sistema de referencia heliocéntrico, o sea:

Su distancia al Sol:

$$r_T = \rho_T r_{\oplus}.$$

Longitud  $\alpha_{\sigma}$ , Latitud  $\delta_{\sigma}$ , respecto a la Eclíptica (ver fig. 5).

La mayoría de los planetas tienen órbitas de excentricidad e inclinación, respecto a la Eclíptica, muy pequeñas; en este caso  $\delta_{\sigma} \ll 1$ ,  $r_T$  es casi constante, y  $\alpha_{\sigma}$  es, aproximadamente, una función lineal del tiempo. El problema de determinación de la trayectoria para alcanzar estos tipos de blanco es mucho más sencillo que en otros casos más generales. Por ejemplo, si la Sonda tiene que interceptar un cometa, el problema es mucho más complejo debido a que la dependencia de las coordenadas del cometa con el tiempo es complicada.

#### 4.2. Relaciones geométricas.

Del mismo modo que en la fase de ascenso hiperbólico, en la órbita interplanetaria existen diversas relaciones geométricas y dinámicas entre las condiciones de inyección y la posición del blanco. Empezaremos con las relaciones geométricas.

Cuando se desprecian las perturbaciones de la Tierra y otros planetas, la trayectoria de la Sonda vista desde un sistema de coordenadas heliocéntrico inercial, es plana.

Si se conoce la posición del blanco en el instante de llegada de la Sonda, respecto a la posición de la Tierra en el instante de salida (o sea, si se conocen  $\delta_{\sigma}(t)$  y  $\alpha_{\sigma}(t) - \Sigma_{\oplus}$

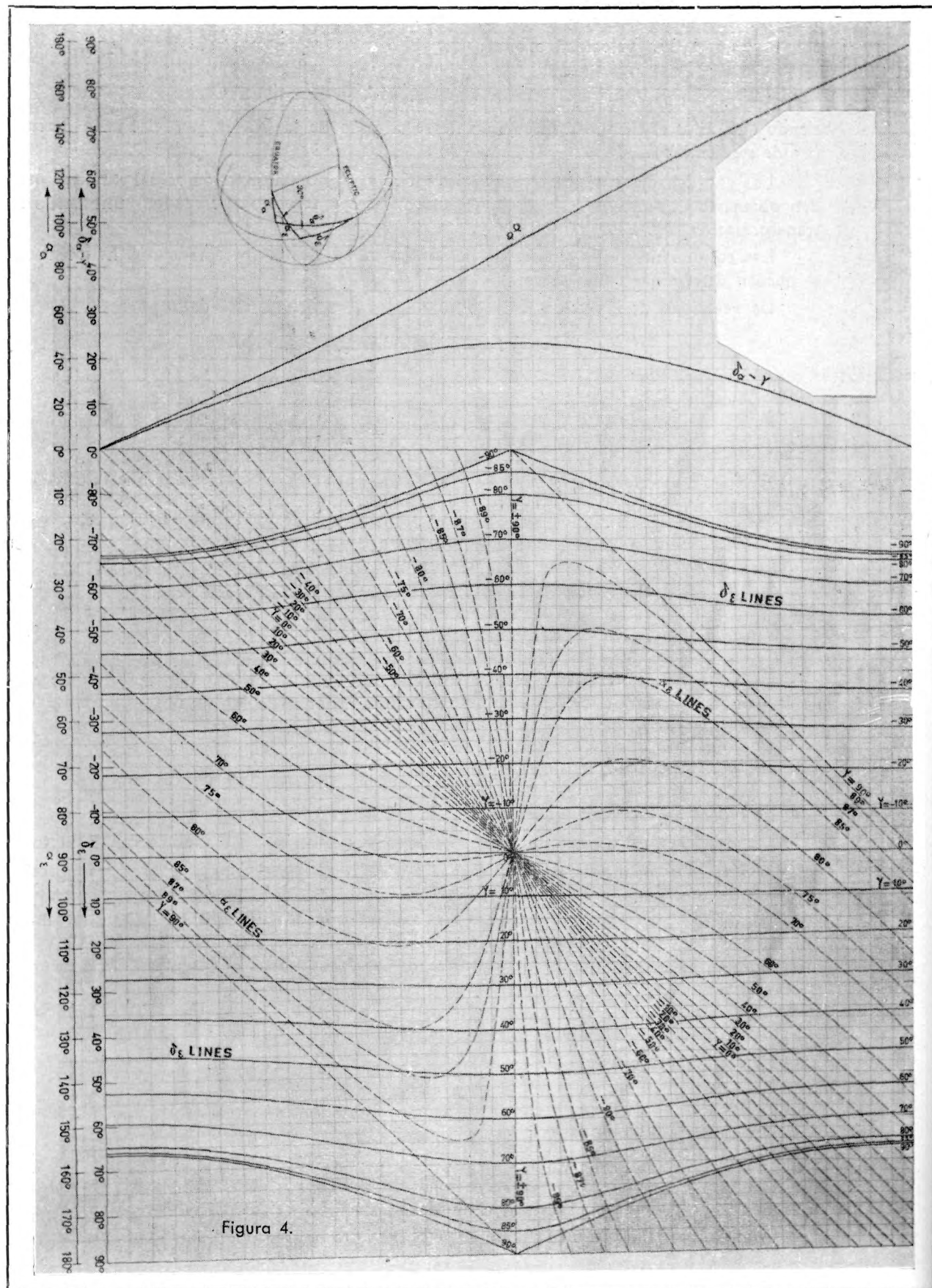


Figura 4.



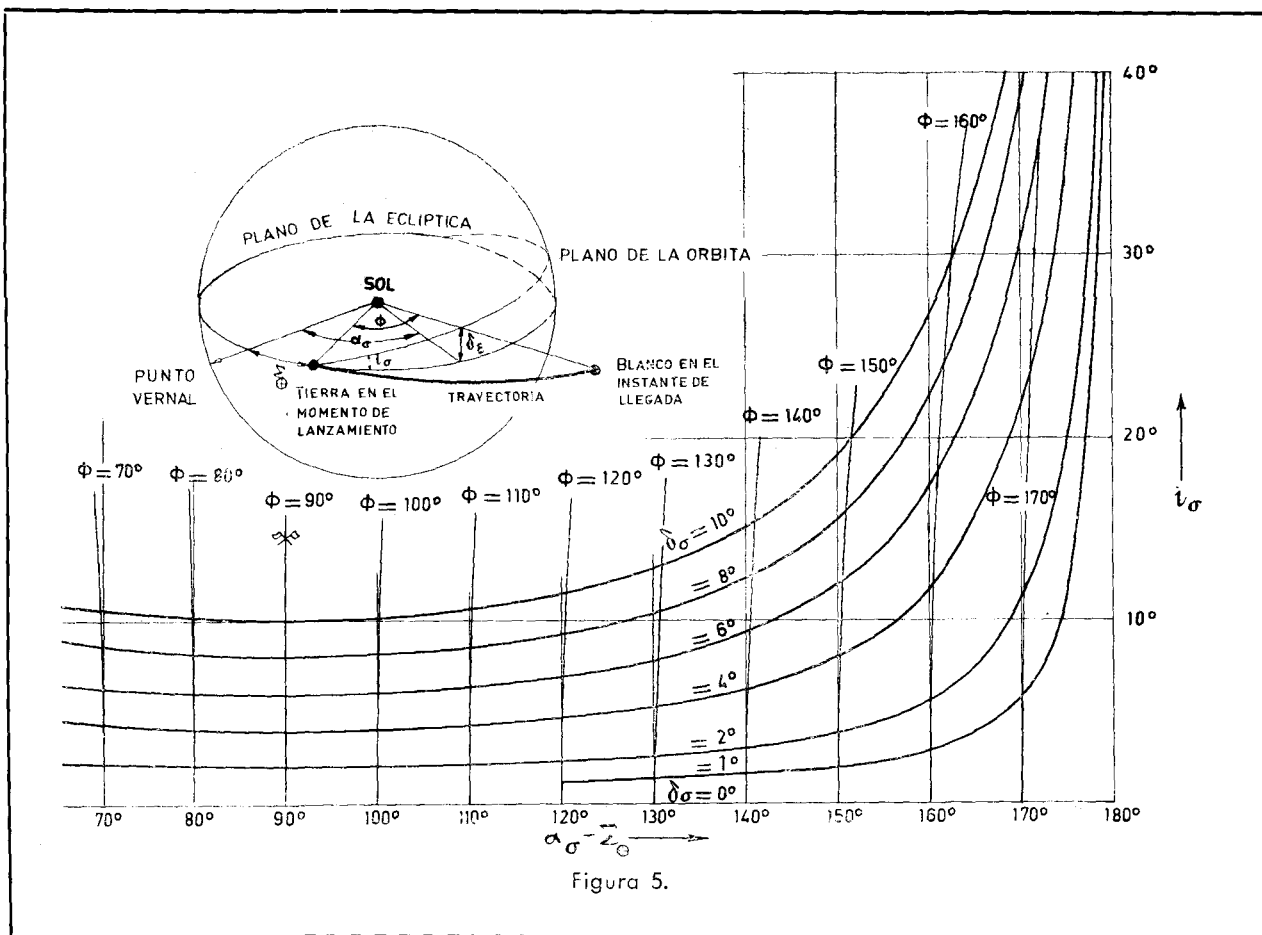


Figura 5.

$(t - t_b)$ ), entonces se puede calcular la inclinación  $i_j$  de la órbita respecto a la Eclíptica, así como el ángulo central de viaje:

$$\operatorname{tg} i_j = \operatorname{tg} \delta_j / \sin \left\{ \alpha_j (t) - \Sigma_{\oplus} (t - t_b) \right\}; \quad [20]$$

$$\cos \phi = \cos \delta_{\sigma} \cos \left\{ \alpha_{\sigma} (t) - \Sigma_{\oplus} (t - t_b) \right\}. \quad [21]$$

Estas relaciones han sido dibujadas en la figura 5. Esta figura substituye, en la fase de viaje interplanetario, a la figura 4 de la Ref. 5 obtenida para la fase de ascenso.

La longitud del nodo ascendente  $\Omega_j$  será  $\Sigma_{\oplus}$  ó  $\Sigma_{\oplus} + \pi$ , dependiendo de que  $i_j$  sea positiva o negativa.

#### 4.3. Relaciones dinámicas.

En función de  $\delta$  (anomalía verdadera) y de las variables adimensionales  $v = V/V_{\oplus}$ ,  $\rho = r/r_{\oplus}$  (los subíndices I, T, p y a indicarán condiciones en el punto de inyección, blanco, perihelio y afelio, respectivamente) subsisten las relaciones siguientes, obtenidas al estudiar la fase de ascenso.

Ecuación de la trayectoria:

$$\rho = \rho_p (1 + e) / (1 + e \cos \theta); \quad [22]$$

donde  $\rho_p$ , el radio del perihelio, es la menor de las raíces de la siguiente ecuación, que da  $\rho_a$  y  $\rho_p$ :

$$(2 - v_1^2) \rho^2 - 2 \rho + v_1^2 \cos^2 \gamma = 0; \quad [23]$$

mientras que la excentricidad  $e$  está dada por:

$$e = \frac{\rho_a - \rho_p}{\rho_a + \rho_p} = \sqrt{1 - v_1^2 (2 - v_1^2) \cos^2 \gamma}. \quad [24]$$

El semieje mayor  $a$  está dado por:

$$a/r_{\oplus} = (\rho_a + \rho_p) / 2 = 1 / (2 - v_1^2). \quad [25]$$

y el período  $\tau$ , en años, es:

$$\tau = (a/r_{\oplus})^{3/2}. \quad [26]$$

La anomalía verdadera  $\theta_1$  del punto de inyección, se puede determinar en función de  $\rho_p$  y  $e$  mediante la relación:

$$\cos \theta_1 = [\rho_p (1 + e) - 1] / e, \quad [27]$$

o mediante la relación [5, a]. El argumento del perihelio,  $\omega_j$ , está dado por  $-\theta_1$  ó  $-\theta_1 + \pi$ , dependiendo del signo positivo o negativo de  $i_j$ .

El ángulo de viaje  $\Phi$  satisface la relación:

$$\rho_1 [1 + e \cos (\theta_1 + \Phi)] = 1 + \cos \theta_1, \quad [28]$$

entre los parámetros dinámicos de inyección,  $v_1$  y  $\gamma$ , el ángulo de viaje  $\Phi$  y  $\rho_p$ . Esto es equivalente a las relaciones en los casos de ascenso lunar e hiperbólico (ver ec. [9]). Sin embargo,  $v_1$  en este caso no está relacionada directamente con la energía requerida para la inyección, y no tiene, por consiguiente, un valor indicativo equivalente.

El tiempo de viaje entre el perihelio y un punto de anomalía verdadera  $\theta$  es (Ref. 6), en años:

$$t(\theta) = \frac{(a/r_{\oplus})^{3/2}}{2\pi} \cdot \left[ 2 \arctg \left( \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right) - \frac{e \sqrt{1-e^2} \sin \theta}{1 + \cos \theta} \right], \quad [29]$$

y el tiempo de viaje,  $t_b$ , es, por consiguiente:

$$t_b = t(\Phi + \theta_1) - t(\theta_1). \quad [30]$$

Con condiciones de inyección  $v_a$ ,  $\delta_{\varepsilon}$ ,  $\lambda_{\varepsilon}$ , dadas, las características más importantes  $\rho_p$ ,  $\rho_a$ ,  $e$ ,  $a$ ,  $\tau$ ,  $\theta_1$ ,  $i_j$  y  $\gamma$  pueden determinarse. Las figuras 6 a la 13, muestran algunos de los resultados. Entre ellas,  $\Delta V = V_1 - \sqrt{2 V_c}$  a  $h_p = 200$  Km.

El  $\rho$  máximo que se puede alcanzar con una  $v_a$  dada se obtiene para  $\lambda_{\varepsilon} = 0$ ,  $\delta_{\varepsilon} = 0$ , y tiene el valor:

$$\rho_{\max} = (1 + v_a)^2 / (1 - 2 v_a - v_a^2). \quad [31]$$

Del mismo modo, el valor mínimo de  $\rho$  se obtiene para  $\lambda_{\varepsilon} = \pi$ ,  $\delta_{\varepsilon} = 0$  y está dado por:

$$\rho_{\min} = (1 - v_a)^2 / (1 + 2 v_a - v_a^2). \quad [32]$$

El valor máximo de  $\gamma$ , obtenido para  $\delta_{\varepsilon} = 0$  y  $\cos \lambda_{\varepsilon} = -v_a$  está dado por:

$$(\sin \gamma)_{\max} = v_a. \quad [33]$$

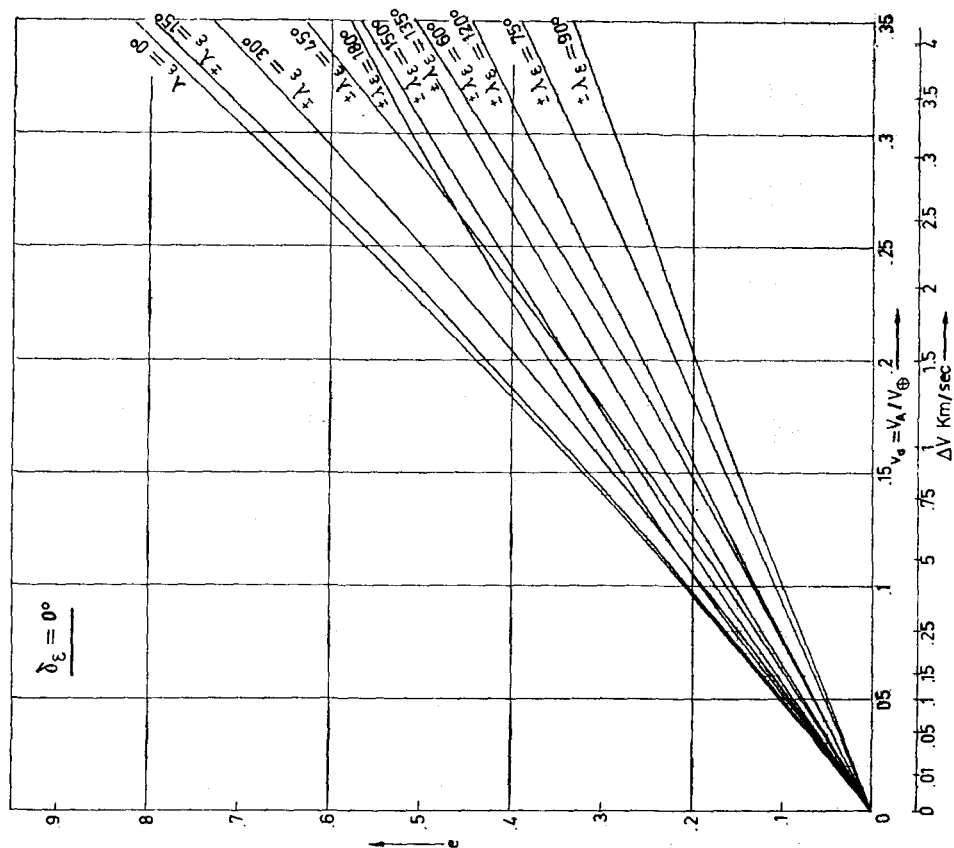


Figura 7.

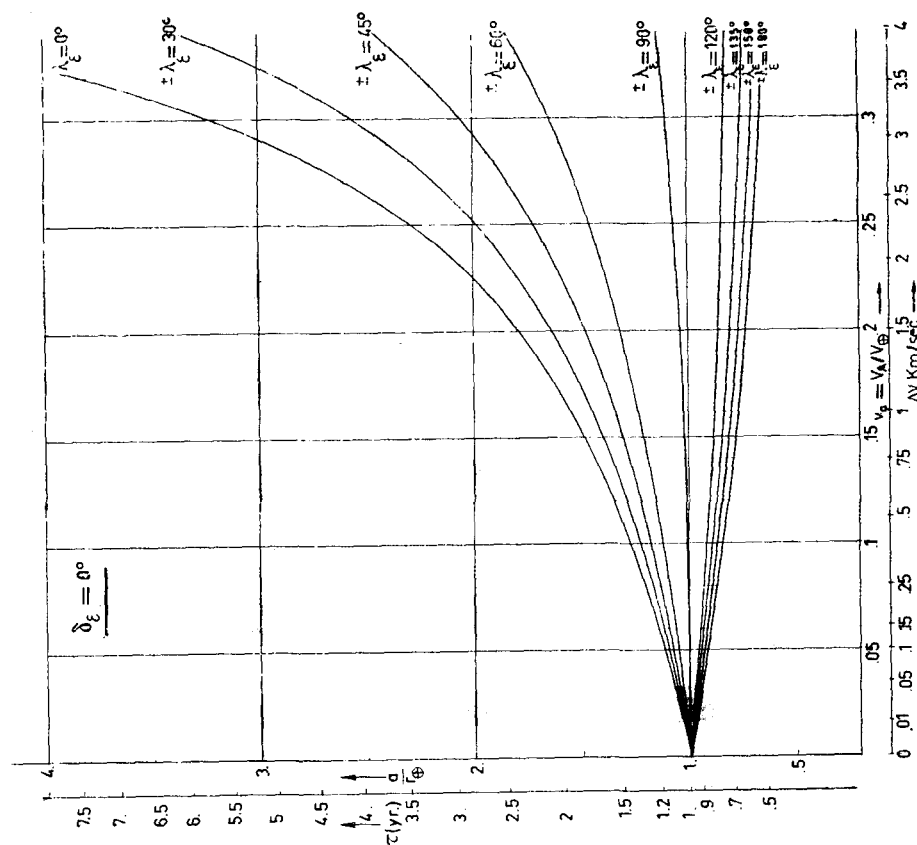


Figura 6.

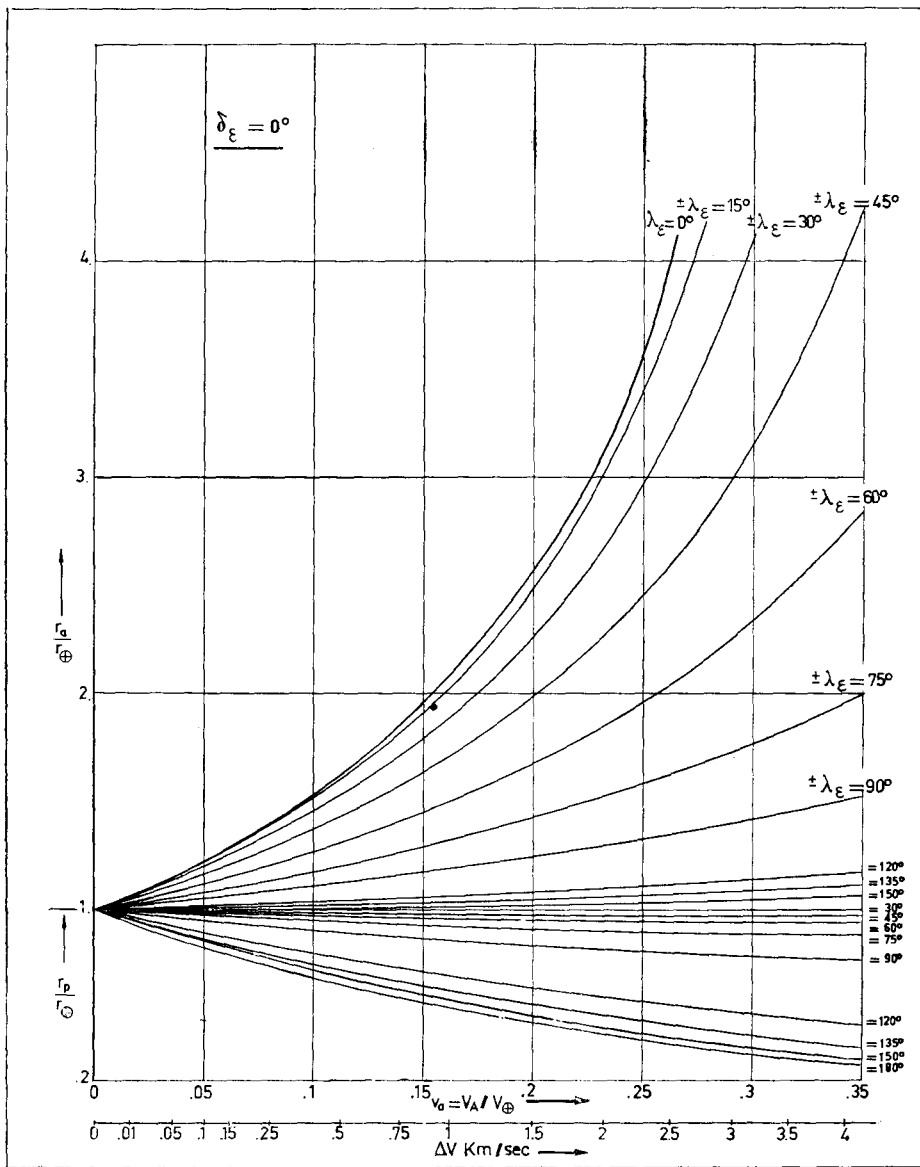


Figura 8.

El valor máximo de  $i_{\odot}$ , obtenido para  $\lambda_{\odot} = -\pi$ ,  $\cos \delta_{\odot} = v_a$ , está dado por:

$$(\sin i_{\odot})_{\max} = (\sin i_{\odot})_{\max} = v_a \quad y \quad h_{\odot} = \frac{v_a}{\sqrt{1 + v_a^2}}. \quad [34]$$

Para una posición del blanco y tiempo de viaje dados, se puede determinar  $\Phi$  e  $i_{\odot}$ , con lo que resolviendo numéricamente las ecuaciones [19], [28] y [30], se pueden evaluar las condiciones de inyección  $v_a$ ,  $\delta_{\odot}$  y  $\lambda_{\odot}$ . En particular,  $v_a$  será una función del tiempo de viaje  $t_b$ , para un blanco dado; y esta relación se puede utilizar para determinar el tiempo de viaje más conveniente y, después, los parámetros de lanzamiento restantes. La relación  $v_a(t_b)$  cambia con la posición del blanco a lo largo de su trayectoria. Cuando esta variación se toma en cuenta, se puede encontrar el tiempo de llegada más conveniente. Este método debe usarse para sondas cometarias.

#### 4.4. Teoría linealizada de la órbita interplanetaria.

El problema de encontrar los parámetros de inyección correspondientes a un blanco dado, del modo que ha sido planteado en el último párrafo, implica la solución numérica de un sistema complicado de ecuaciones algebraicas. Sin embargo, para un gran nú-

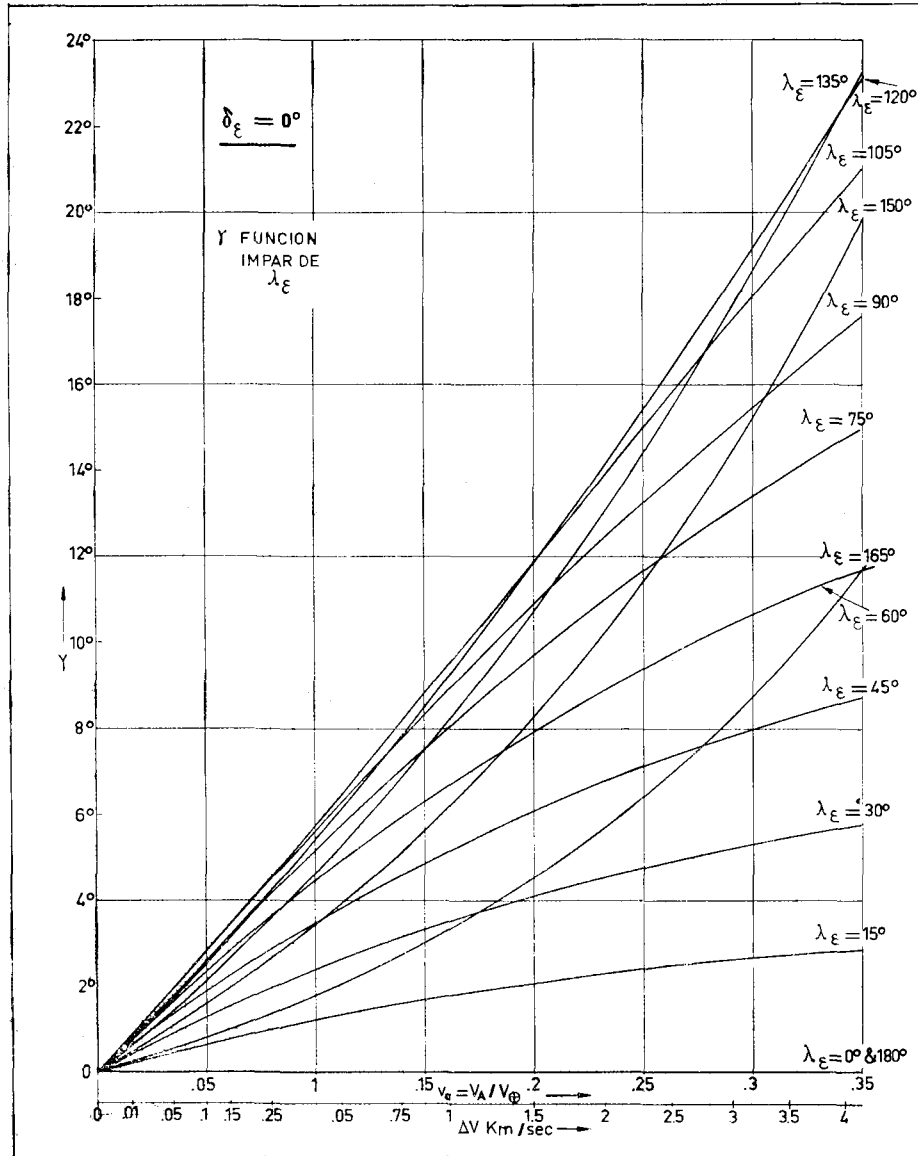
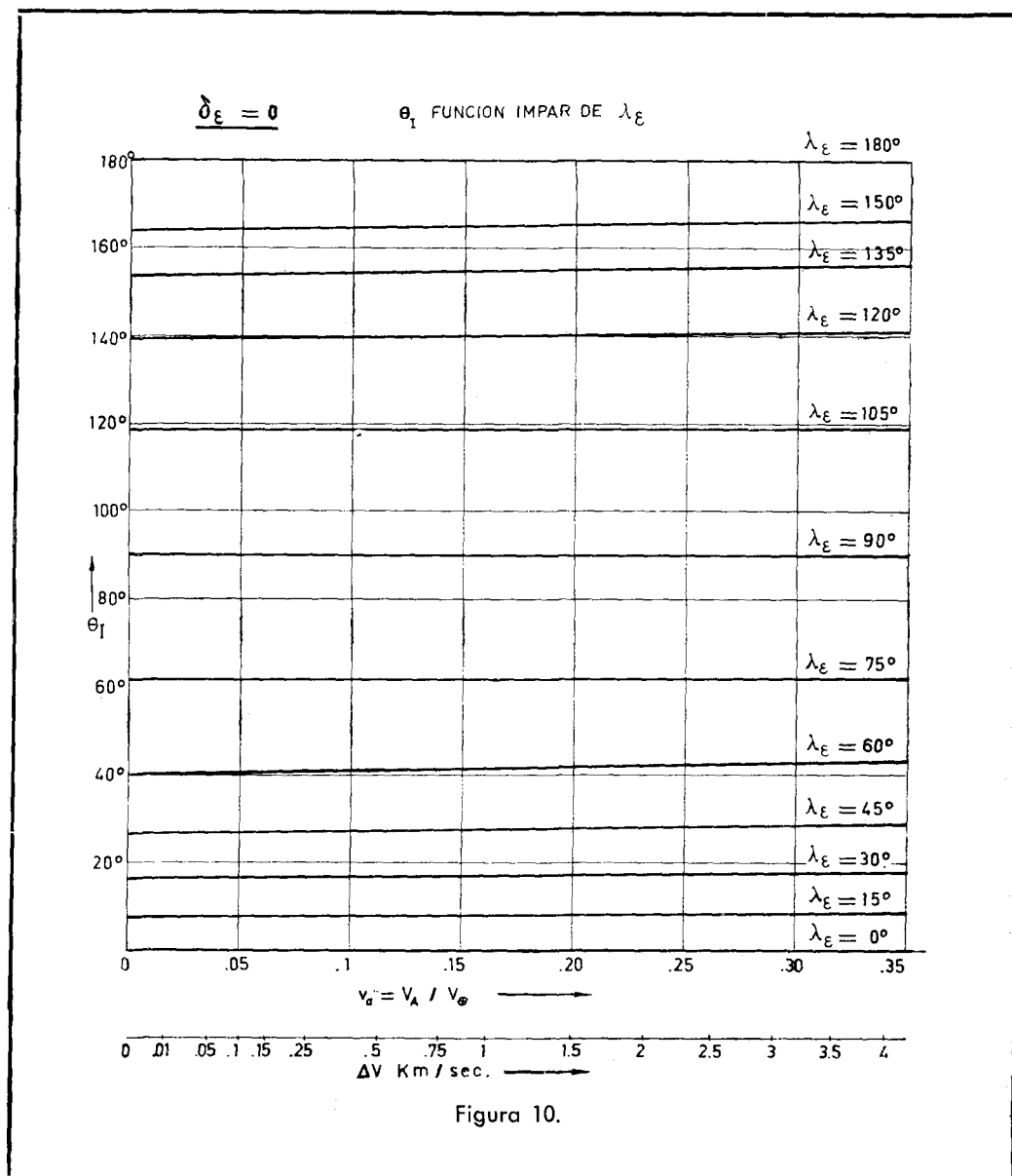


Figura 9.

mero de misiones espaciales la energía disponible no es grande; de modo que  $v_a = V_A / V_{\oplus}$  es pequeño comparado con la unidad. Este hecho nos permite simplificar el problema mencionado antes, desarrollando una teoría linealizada de vuelo interplanetario. Aun en los casos en que  $v_a$  no sea suficientemente pequeño, la teoría linealizada es, por su simplicidad, útil para propósitos ilustrativos.



Despreciando términos del orden  $O(v_a^2)$  comparados con  $v_a$ , en las relaciones obtenidas en la última sección, obtenemos los siguientes resultados:

$$\text{Ecuación de la trayectoria: } (\rho - 1) / v_a \cos \delta_\varepsilon = 2 \cos \lambda_\varepsilon - \sqrt{3 \cos^2 \lambda_\varepsilon + 1} \cos(\theta_I + \Phi), \quad [35]$$

$$\text{Afelio y perihelio: } (p_{a,p} - 1) / v_a \cos \delta_\varepsilon = 2 \cos \lambda_\varepsilon \pm \sqrt{3 \cos^2 \lambda_\varepsilon + 1}. \quad [36]$$

$$\text{Excentricidad: } e / v_a \cos \delta_\varepsilon = \sqrt{3 \cos^2 \lambda_\varepsilon + 1}. \quad [37]$$

$$\text{Semieje mayor: } (a/r_\oplus - 1) / v_a \cos \delta_\varepsilon = 2 \cos \lambda_\varepsilon. \quad [38]$$

$$\text{Semieje menor: } b/r_\oplus = a/r_\oplus. \quad [39]$$

$$c/p_\oplus = e. \quad [40]$$

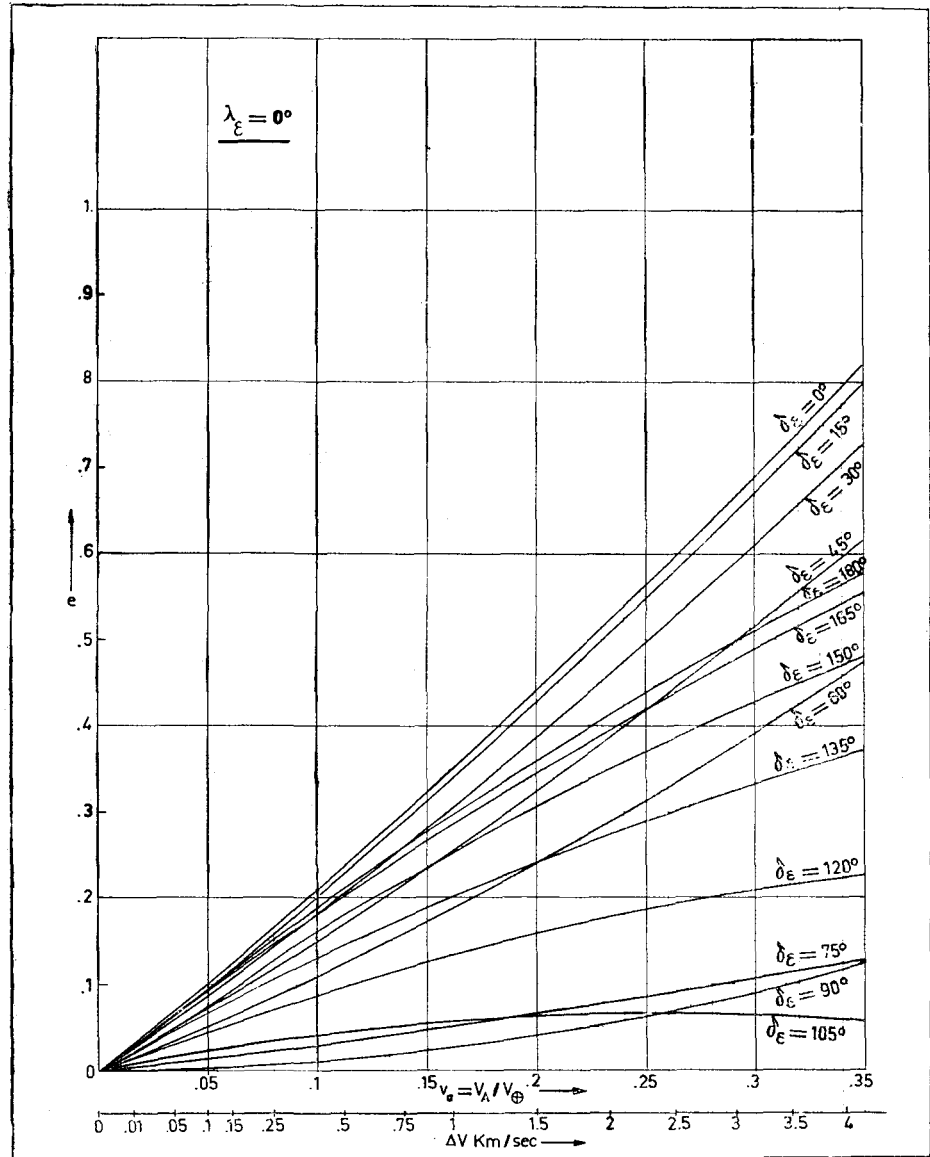


Figura 11.

$$\text{Período (años): } (\tau - 1) / 3 v_a \cos \delta_\varepsilon = \cos \lambda_\varepsilon . \quad [41]$$

$$\text{Tiempo de viaje: } (2\pi t_b - \Phi) / v_a \cos \delta_\varepsilon = 3 \Phi \cos \lambda_\varepsilon - 2 \sqrt{3 \cos^2 \lambda_\varepsilon + 1} [ \sin (\theta_1 + \Phi) - \sin \theta_1 ] \quad [42]$$

Anomalía verdadera en la inyección:

$$\left\{ \theta_1 - \arctg \frac{\operatorname{tg} \lambda_\varepsilon}{2} \right\} / v_a \cos \delta_\varepsilon = \frac{\sin \lambda_\varepsilon \{ -1 + \cos^2 \delta_\varepsilon (1 + \cos^2 \lambda_\varepsilon) \}}{\cos^2 \delta_\varepsilon (4 \cos^2 \lambda_\varepsilon + \sin^2 \lambda_\varepsilon)} . \quad [43]$$

Angulo de elevación:

$$\gamma / v_a \cos \delta_\varepsilon = \sin \lambda_\varepsilon . \quad [44]$$

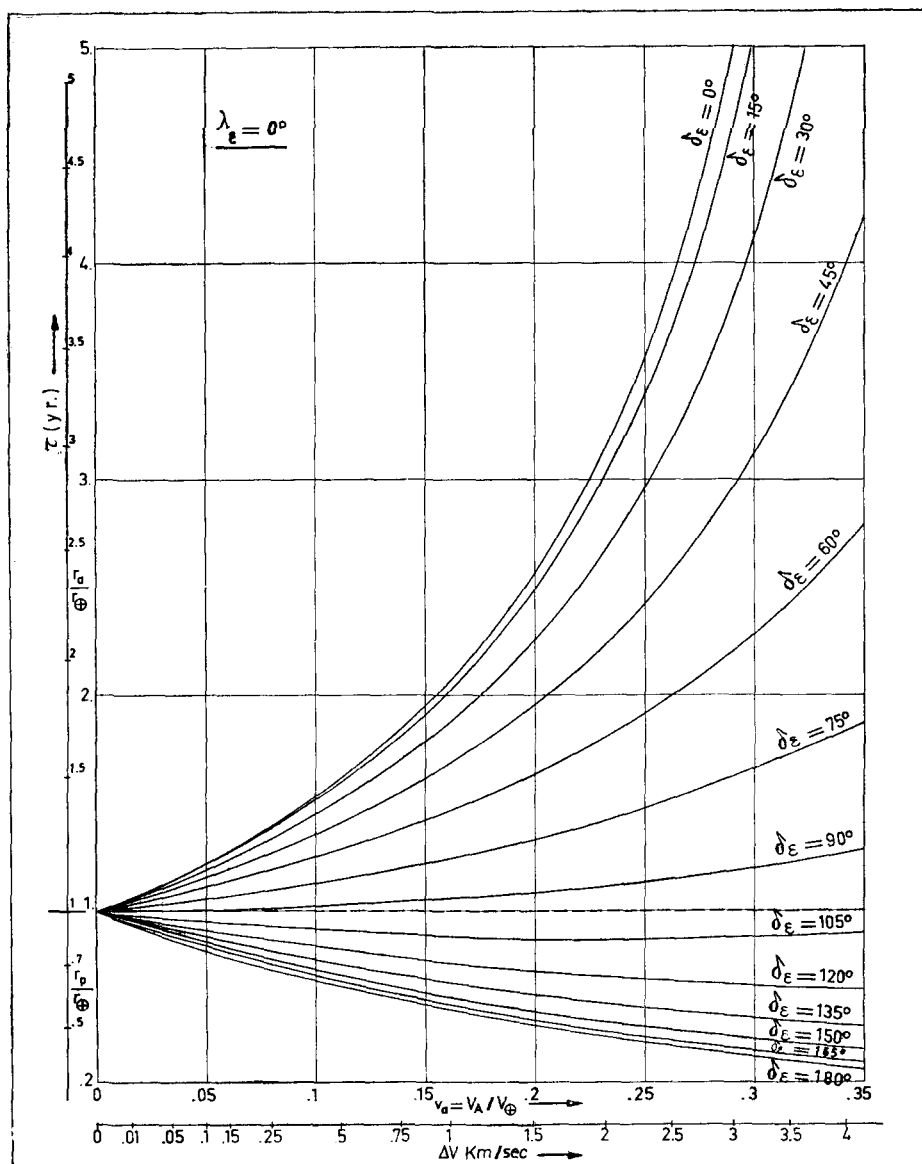


Figura 12.

Inclinación de la órbita con respecto a la Eclíptica:

$$i_s / v_a = \text{sen } \delta_s . \quad [45]$$

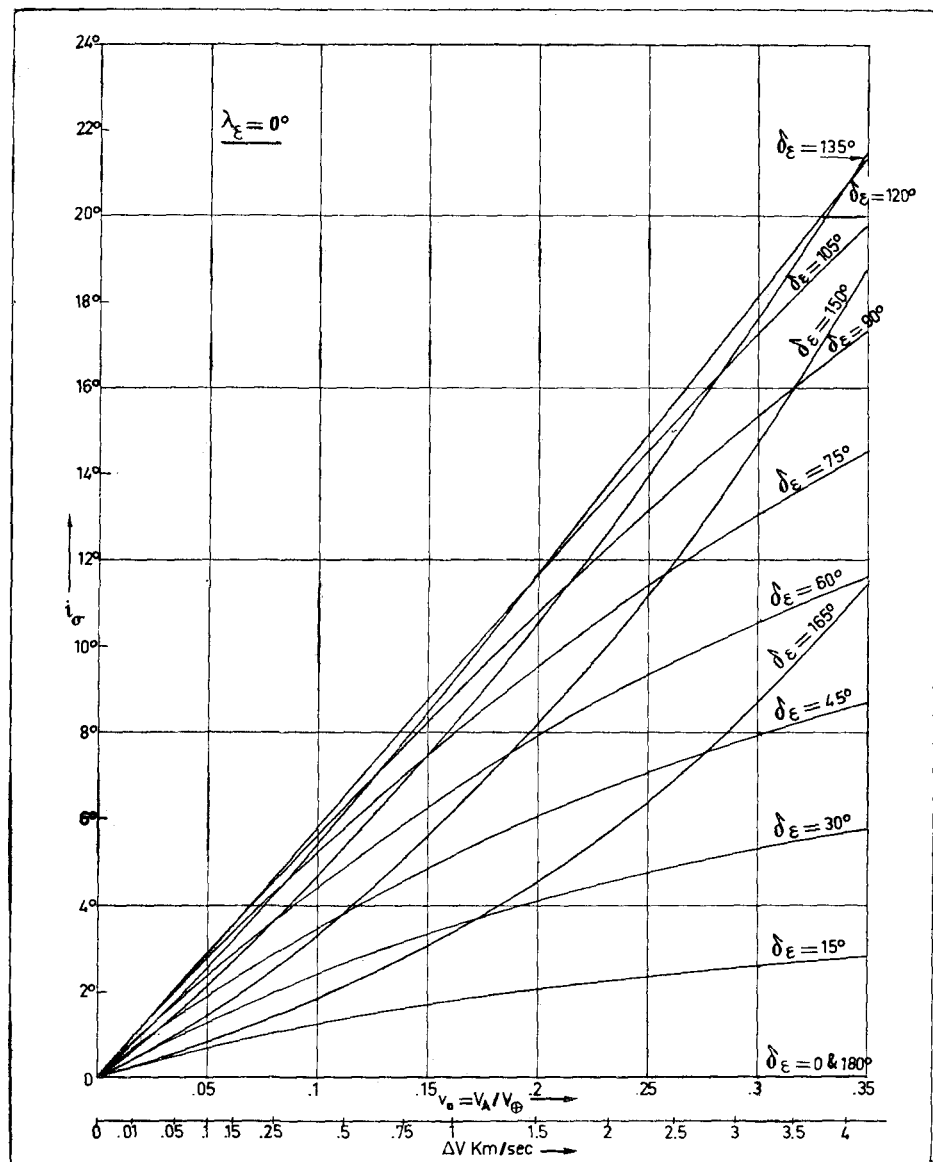
En los segundos miembros de todas estas ecuaciones se han despreciado los términos del orden de  $v_a$ .

Algunos de estos resultados se han dibujado en las figuras 15, 16 y 17. En particular la figura 16 da la trayectoria, y la 17 el tiempo en función del ángulo de viaje  $\Phi$ , para distintos valores de  $\lambda_s$ . La figura 17 nos da, además del tiempo de viaje total  $t_b$ , la historia del tiempo, si sustituimos  $\Phi$  por  $\theta - \theta_i$ .

El ángulo central de viaje total  $\Phi$ , calculado de [35], está dibujado en la figura 18. Cuando  $v_a \rightarrow 0$ ,  $\Phi = 2 \pi t_b$ , como puede deducirse de [42]. Con este límite, la figura 18 nos da la relación entre el tiempo de viaje total y el máximo tiempo de viaje (medio año).



Figura 13.

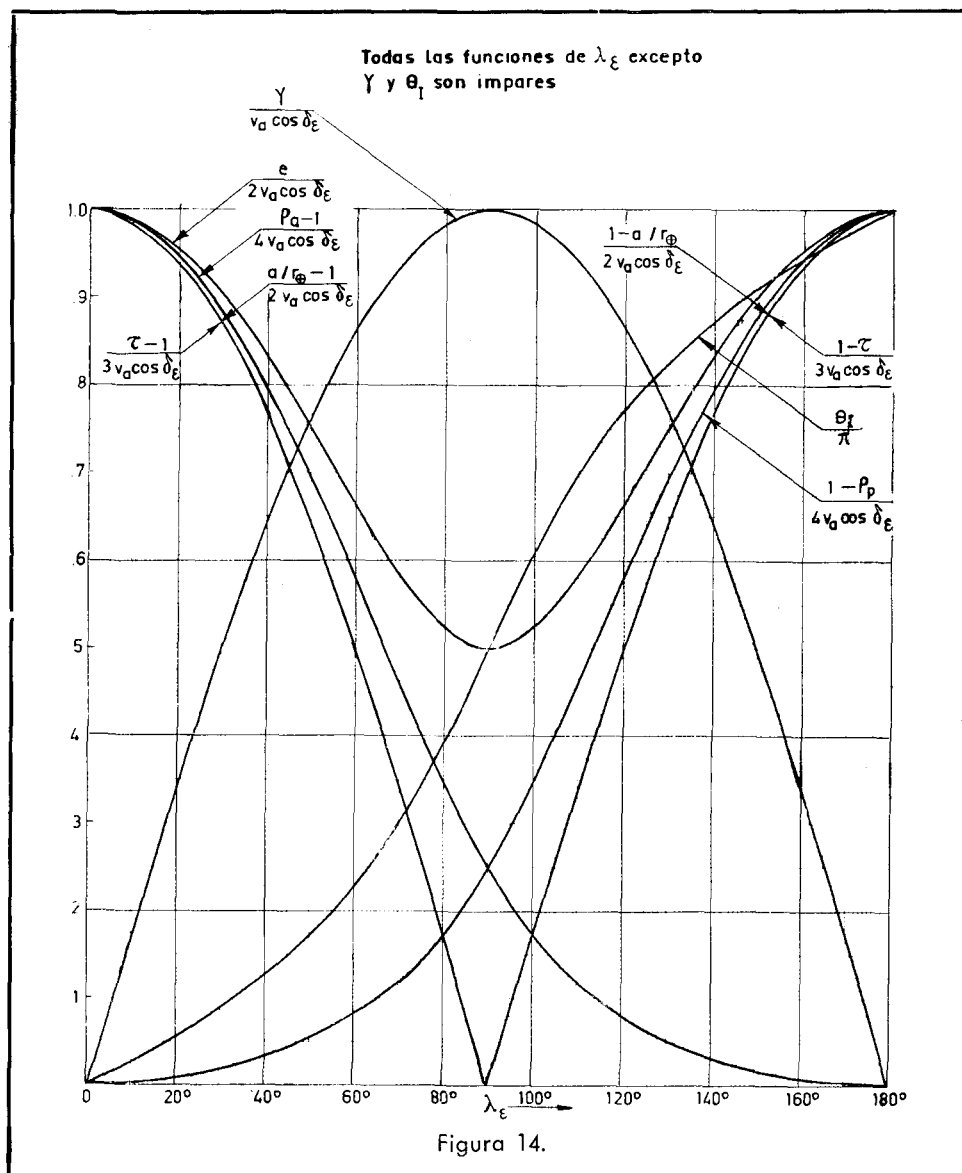


Este tiempo máximo corresponde a una órbita de Hohmann ( $\Phi = \pi$ ,  $\lambda_E = 0$ ) entre la Tierra y el blanco a una distancia  $r_T$  del Sol, como puede verse en la figura 18. La órbita de Hohmann corresponde a la de mínima energía. Cuando  $\lambda_E \neq 0$  y por tanto la dirección radial de escape no coincide con la dirección del movimiento de la Tierra, la mínima energía (tiempo máximo) se obtiene también cuando el blanco está en el afelio.

Puede verse, no obstante, que un pequeño incremento de energía ( $v_a$ ) sobre el mínimo, da lugar a grandes reducciones en el tiempo de viaje. También se ve que, para una energía dada, hay un  $\lambda_E$  que da el mínimo tiempo de viaje, o también, que para un tiempo de viaje dado hay un  $\lambda_E$  que da la mínima energía. Si  $v_a$  no es suficientemente pequeña, el tiempo de viaje puede calcularse por medio de las figuras 17 y 18.

Supongamos que queremos determinar los parámetros de inyección necesarios para alcanzar un punto dado en un instante dado, o sea que queremos determinar:

$$v_a, \lambda_E, \delta_E, t_b \text{ ó } \Sigma_{\oplus}(t - t_b) \text{ dados } \delta_{\odot}(t), \alpha_{\odot}(t) \text{ y } r_T(t).$$



Las ecuaciones de la trayectoria [35], tiempo de viaje [42] y ángulo de inclinación [45] pueden escribirse en la forma siguiente:

$$v_a \cos \delta_\varepsilon = \frac{\rho_T - 1}{2 \cos \lambda_\varepsilon - \sqrt{3 \cos^2 \lambda_\varepsilon + 1} \cos (\theta_1 + \Phi)}; \quad [46]$$

$$v_a \cos \delta_\varepsilon = \frac{\Sigma_{\oplus}(t) - \alpha_\sigma(t)}{3 \Phi \cos \lambda_\varepsilon - 2 \sqrt{3 \cos^2 \lambda_\varepsilon + 1} \{ \sin (\theta_1 + \Phi) - \sin \theta_1 \}}; \quad [47]$$

$$v_a \sin \delta_\varepsilon = \delta_\sigma / \sin \theta, \quad [48]$$

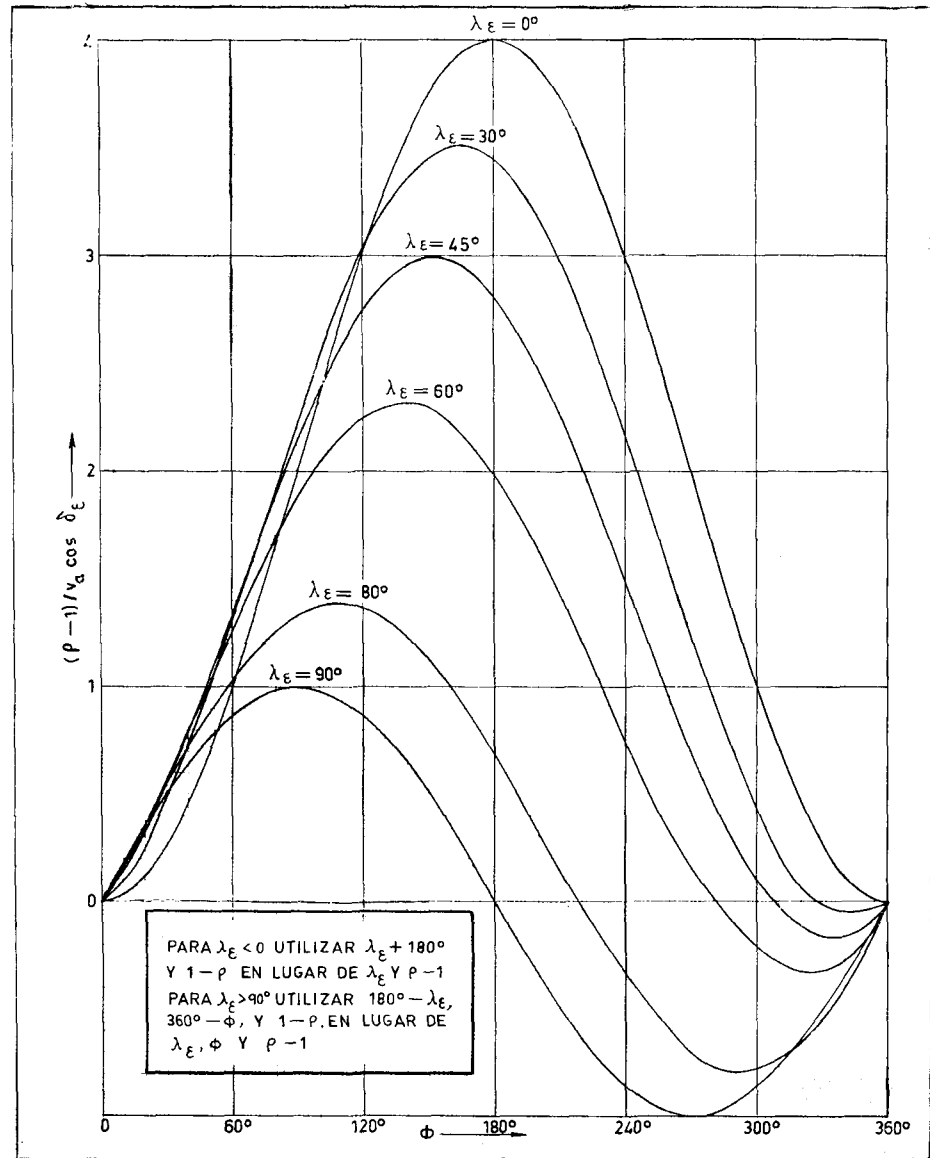
en las que se ha utilizado la linealización

$$i_\sigma = \delta_\sigma / \sin \Phi; \quad [49]$$

$$\Phi = \alpha_\sigma(t) - \Sigma_{\oplus}(t) + 2\pi t_b, \quad [50]$$

de las relaciones geométricas [20] y [21].

Figura 15.



En estas relaciones podemos escribir  $\theta_1$  en función de  $\lambda_\epsilon$  utilizando la expresión:

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \lambda_\epsilon.$$

De [45] y [46] deducimos:

$$[r_a/(\rho_T - 1)]^2 = [2 \cos \lambda_\epsilon - \sqrt{3 \cos^2 \lambda_\epsilon + 1} \cos (\theta_1 + \Phi)]^{-2} + [\delta_\sigma/(\rho_T - 1)]^2 \operatorname{cosec}^2 \Phi, \quad [51]$$

que da la energía necesaria para alcanzar un blanco dado en función del ángulo de viaje y de la coordenada  $\lambda_\epsilon$  de la asíntota de escape. El último término del segundo miembro expresa la energía requerida para salir del plano de la Eclíptica, mientras que el primero mide la energía necesaria para moverse en el plano de la Eclíptica lejos de la trayectoria de la Tierra.

PARA  $\lambda_E < 0$  UTILIZAR  $\lambda_E + 180^\circ$  Y  $\phi - 2\pi t_b$   
EN LUGAR DE  $\lambda_E$  Y  $2\pi t_b - \phi$

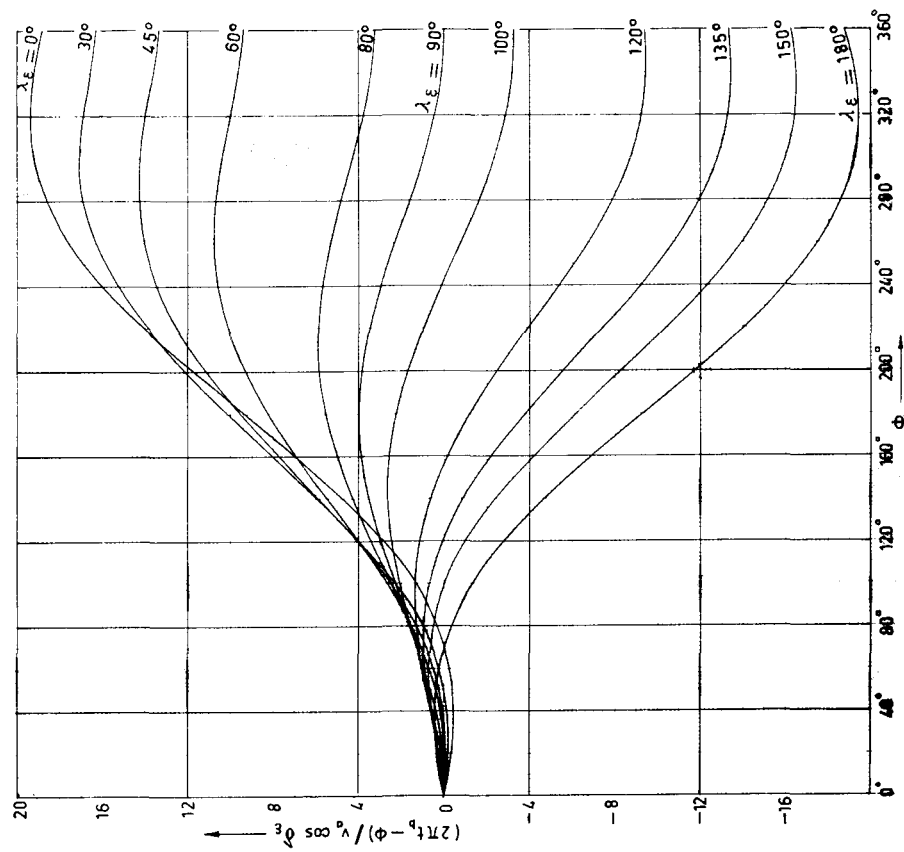


Figura 16.

$\phi/\pi = t_b / t_{max}$ , for  $v_d \rightarrow 0$

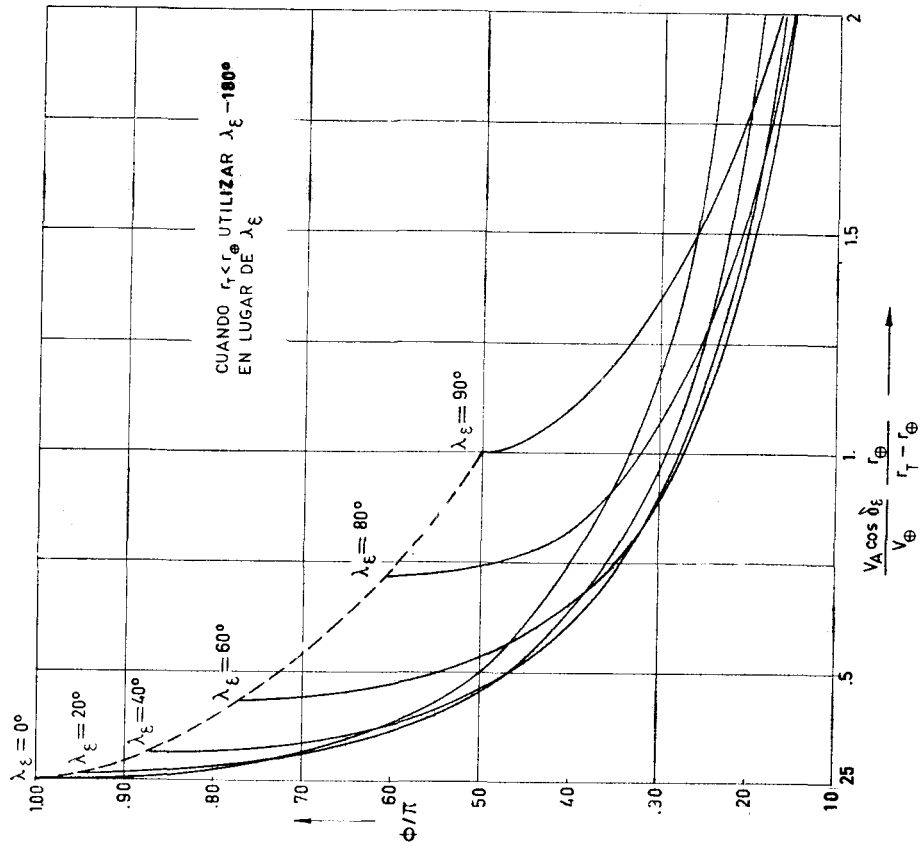


Figura 17.

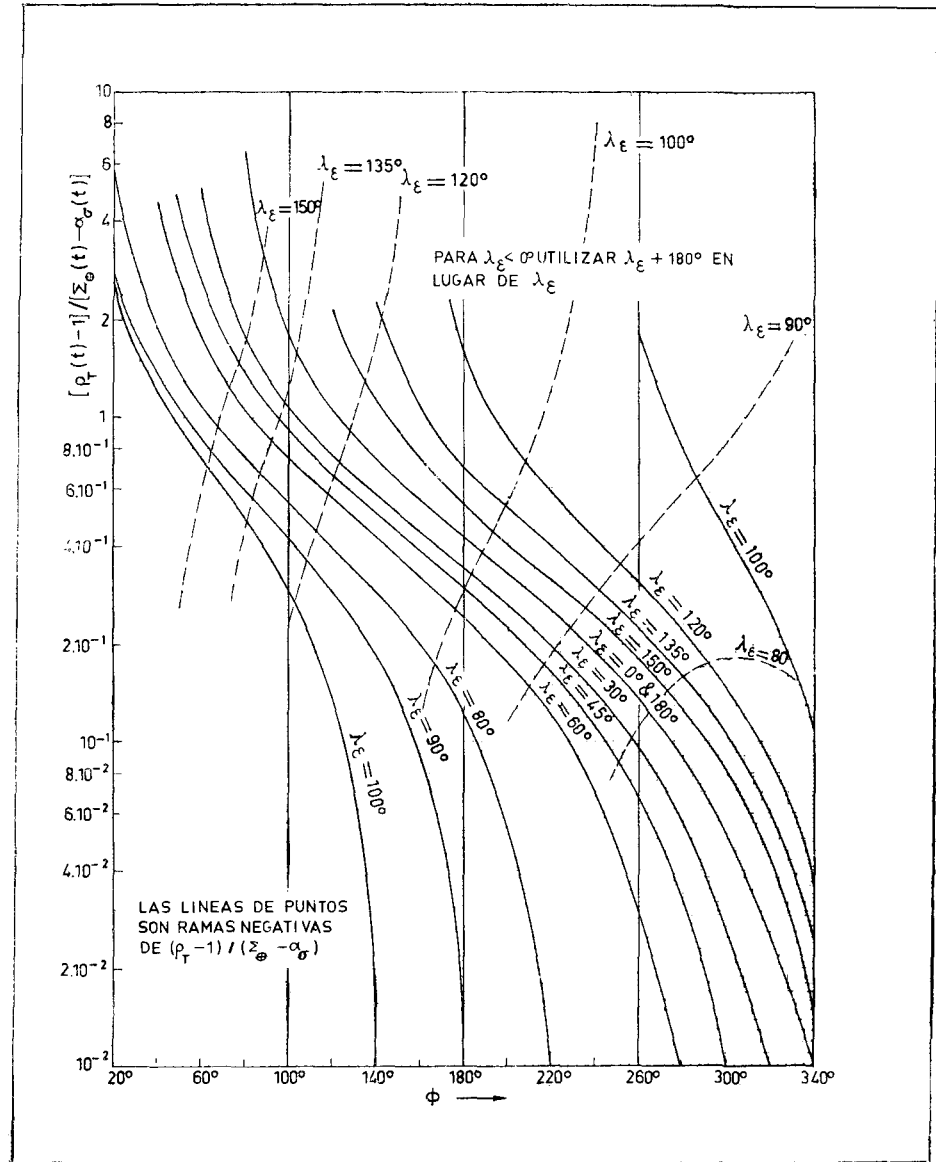


Figura 18.

De [46] y [47] se obtiene una relación adicional entre el ángulo de viaje  $\Phi$  y  $\lambda_\varepsilon$  :

$$\frac{\rho_T(t) - 1}{\Sigma_{\oplus}(t) - \alpha_{\sigma}(t)} = \frac{2 \cos \lambda_\varepsilon - \sqrt{3 \cos^2 \lambda_\varepsilon + 1} \cos(\theta_1 + \Phi)}{3 \Phi \cos \lambda_\varepsilon - 2 \sqrt{3 \cos^2 \lambda_\varepsilon + 1} [\sin(\theta_1 + \Phi) - \sin \theta_1]} \quad [52]$$

que está dibujada en la figura 18.

Con ayuda de la figura 19 se puede dibujar fácilmente  $|\nu_a/(\rho_T - 1)|^2$  como función de  $\Phi$  y  $\lambda_\varepsilon$  para un valor dado de  $|\delta_{\sigma}/(\rho_T - 1)|^2$ .

Con ayuda de la figura 18 podemos dibujar en la figura 19 la relación entre  $\lambda_\varepsilon$  y  $\Phi$  para un valor dado de  $\frac{\Sigma_{\oplus} - \alpha_{\sigma}}{\rho_T - 1}$ . Sobre cada una de estas curvas hay un punto  $\lambda_\varepsilon^*, \Phi^*$  que

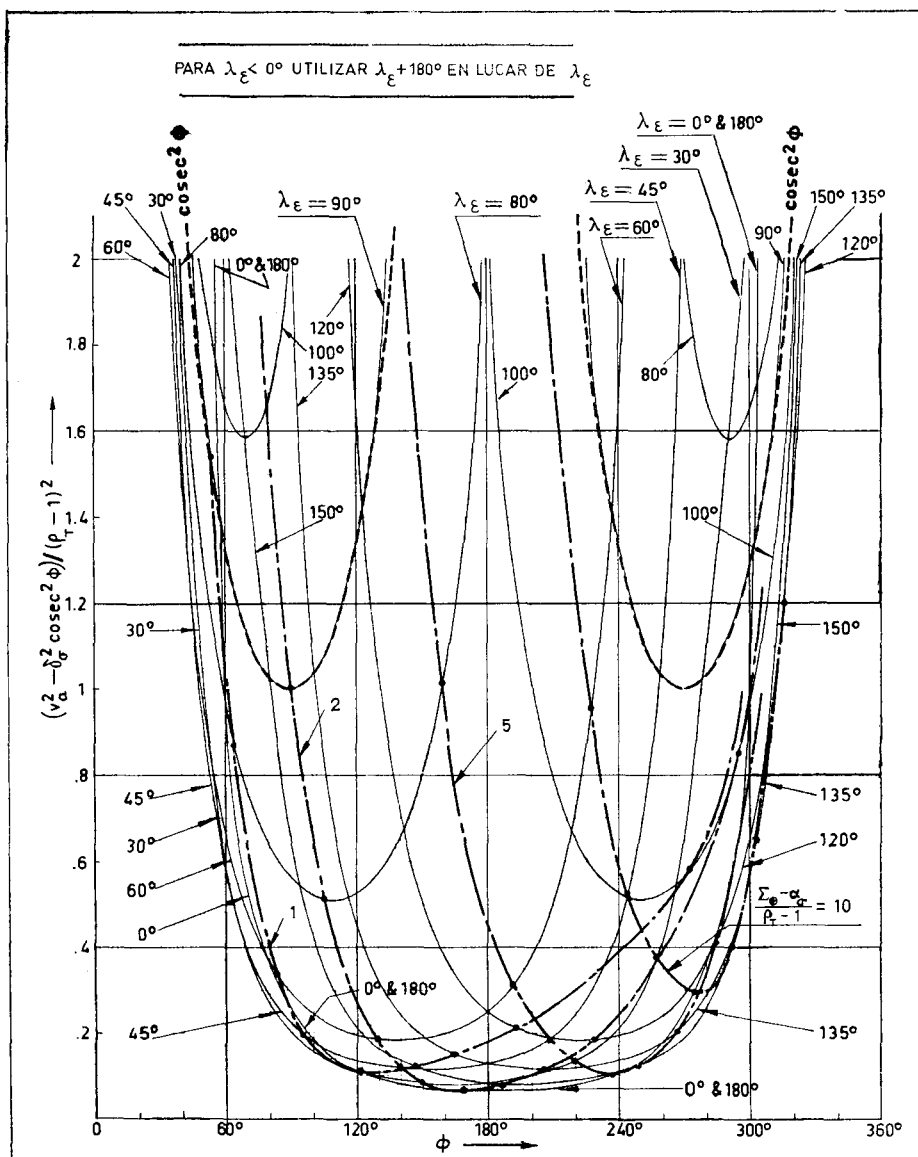


Figura 19.

da el mínimo valor  $v_a^*$  de  $v_a$ , y que es el más conveniente desde el punto de vista de requerimiento energético. Si dibujamos  $v_a^*(t)$  podemos determinar las condiciones de lanzamiento óptimas.

Las condiciones de lanzamiento, en función de las condiciones de inyección en la órbita planetaria  $v_a$ ;  $\lambda_\epsilon$ ,  $\delta_\epsilon$  se determinan de la siguiente forma:

Primeramente, por medio de la figura 4 determinamos la dirección radial exterior  $\alpha_T$  y  $\partial_T$  en función de las coordenadas de la misma dirección respecto a la Eclíptica, que son:

$$\delta_\epsilon \text{ y } \alpha_\epsilon = \Sigma_{\oplus} (t_L) - \lambda_\epsilon + \pi/2.$$

Por medio de las figuras 4 y 5 de la Ref. 5 obtenemos en función de  $\partial_T$  y  $\alpha_T$ , y para el punto de lanzamiento escogido, el intervalo de ángulos de viaje de la órbita de ascenso  $\Phi_b$  que está dentro de los límites de seguridad.

Con la figura 3 determinamos los valores más convenientes de  $\Phi_b$  y  $\gamma$  que dejen en el intervalo anteriormente calculado a  $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_p + \Phi_b$ . Si utilizamos órbita

de espera, con la figura 3 podemos determinar  $\Phi_b$  en función del  $\gamma$  más apropiado para las características del vehículo lanzador. Variando la longitud de la órbita de espera se pueden obtener diferentes ángulos de viaje, que estando dentro de los límites de seguridad de lanzamiento, den, por ejemplo, un azimut de lanzamiento más al Este u otro cualquier tipo de consideraciones.

El valor de  $\alpha_L$  calculado antes, nos dará el instante de lanzamiento de cada día. Puede existir, por tanto, una diferencia de doce horas entre el instante de lanzamiento calculado de esta forma y el obtenido al estudiar la órbita interplanetaria. El tiempo de llegada deberá corregirse consecuentemente. No obstante, en este estudio aproximado, no es necesaria la iteración.

### Órbita del Pioneer V.

Como aplicación de la teoría anteriormente expuesta estudiaremos la órbita del Pioneer V comparando los resultados obtenidos en las teorías no linealizada y linealizada de este trabajo con los resultados reales de la órbita dados en la Ref. 7.

En dicha referencia las condiciones de inyección en la órbita hiperbólica de ascenso son:

$$\begin{aligned}x &= 2.804 \text{ Km.} & x' &= 10,6424 \text{ Km/seg.} \\y &= -5.301 \text{ Km.} & y' &= 3,0783 \text{ Km/seg.} \\z &= 3.223 \text{ Km.} & z' &= 0,5622 \text{ Km/seg.}\end{aligned}$$

en un sistema de coordenadas inercial ecuatorial rectangular, en el que el plano  $xy$  es el del Ecuador, siendo el eje  $x$  positivo hacia el equinoccio vernal de la fecha, y el eje  $z$  positivo hacia el Polo Norte del eje de giro de la Tierra.

Fecha: 11 de marzo de 1960, 13<sup>h</sup> 06<sup>m</sup> GMT.

De estos valores deducimos:

$$\begin{aligned}r_1 &= 6809 \text{ Km.} & V_1 &= 11,093 \text{ Km/seg.} \\ \gamma &= 11^\circ 43' & A'_1 &= 93^\circ 01' & \delta_1 &= 28^\circ 14' & \alpha_1 &= 297^\circ 54'\end{aligned}$$

A la altura  $r_1$  tenemos:

$$\begin{aligned}V_c &= 7,6514 \text{ Km/seg.} \\ \Delta V &= V_1 - \sqrt{2} V_c = 0,27 \text{ Km/seg.} & V_1/V_c &= 1,45.\end{aligned}$$

De la figura 3 deducimos:

$$\begin{aligned}V_A &= 2,41 \text{ Km/seg. (2,452);} \\ e &= 1,098 (1,0987); \\ \Phi_b &= 135^\circ;\end{aligned}$$

los números entre paréntesis corresponden a los valores dados en la referencia antes citada. De la figura 19 obtenemos:

$$i_a = 28,5^\circ (28,40^\circ).$$

De la figura 20:

$$\Omega_a = 201,55^\circ (201,52^\circ);$$

y de la figura 21, en función de  $\partial_1$ ,  $A'_1$  y  $\Delta u_1 = -\theta_1 = -22,10^\circ$ , obtenemos:

$$\omega_a = 73,6^\circ (73,23^\circ),$$

$\theta_1$  se ha obtenido usando la relación exacta  $\sin \gamma = e \sin (\theta_1 - \gamma)$ ; si utilizamos la relación aproximada  $\gamma = 2 \theta_1$  tenemos  $\theta_1 = 23,4^\circ$ .

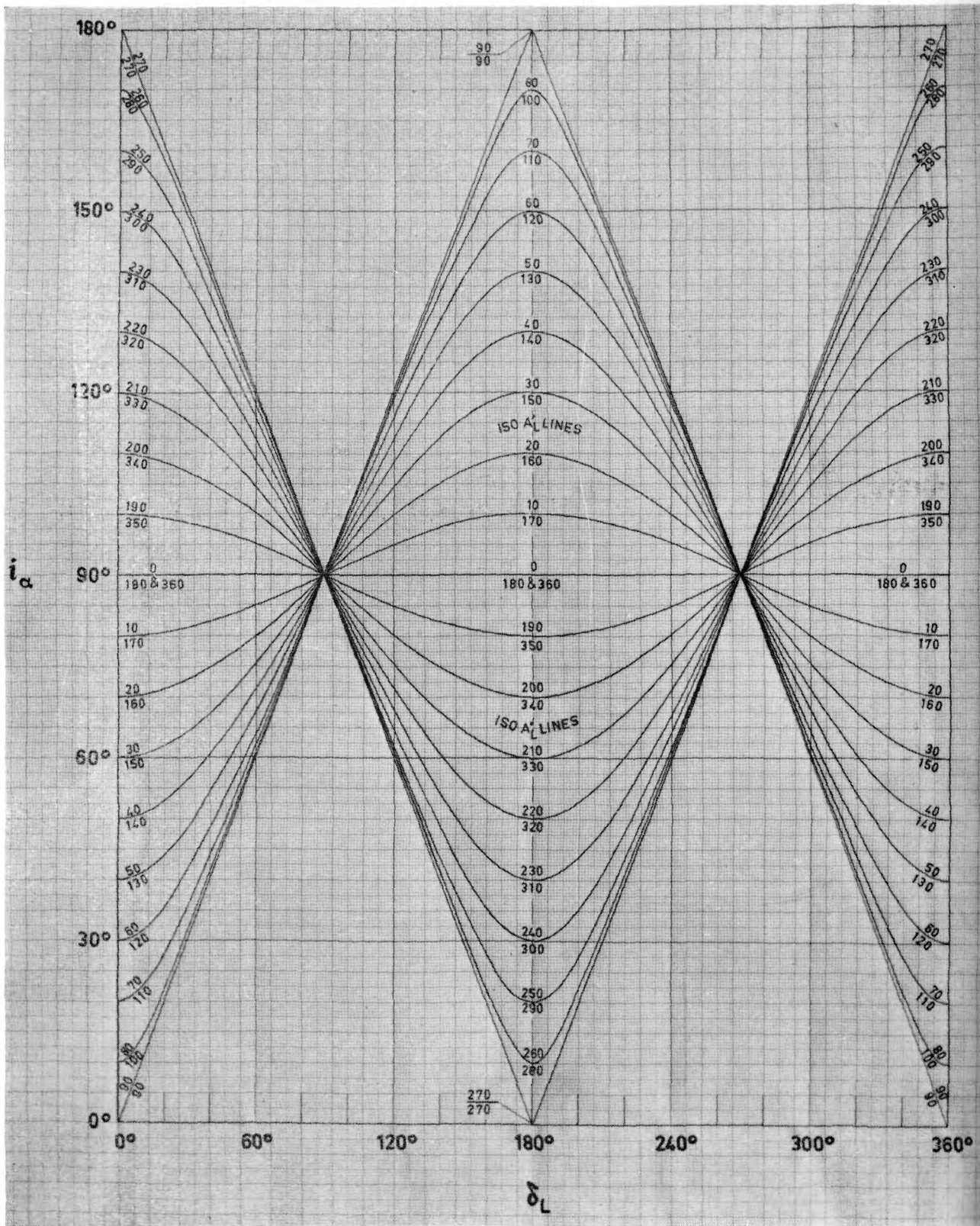


Figura 20.



De la figura 41 de la página 6.55 de la Ref. 7 estimamos:

$$\Phi_1 = 12^\circ \text{ y por tanto } \Phi = \Phi_1 + \Phi_0 = 147^\circ;$$

utilizando ahora la figura 4 de la Ref. 5 podemos determinar el azimut de lanzamiento de Cabo Kennedy. Para  $\delta_T = \delta_I = 28^\circ 14'$  y  $\Phi = 12^\circ$ , tenemos  $A'_L = 84^\circ$ . Con  $\Phi = 147^\circ$  y  $A'_L = 84^\circ$ , obtenemos:

$$\delta_T = -21,5^\circ \text{ y } \alpha_L - \alpha_T = 216^\circ,$$

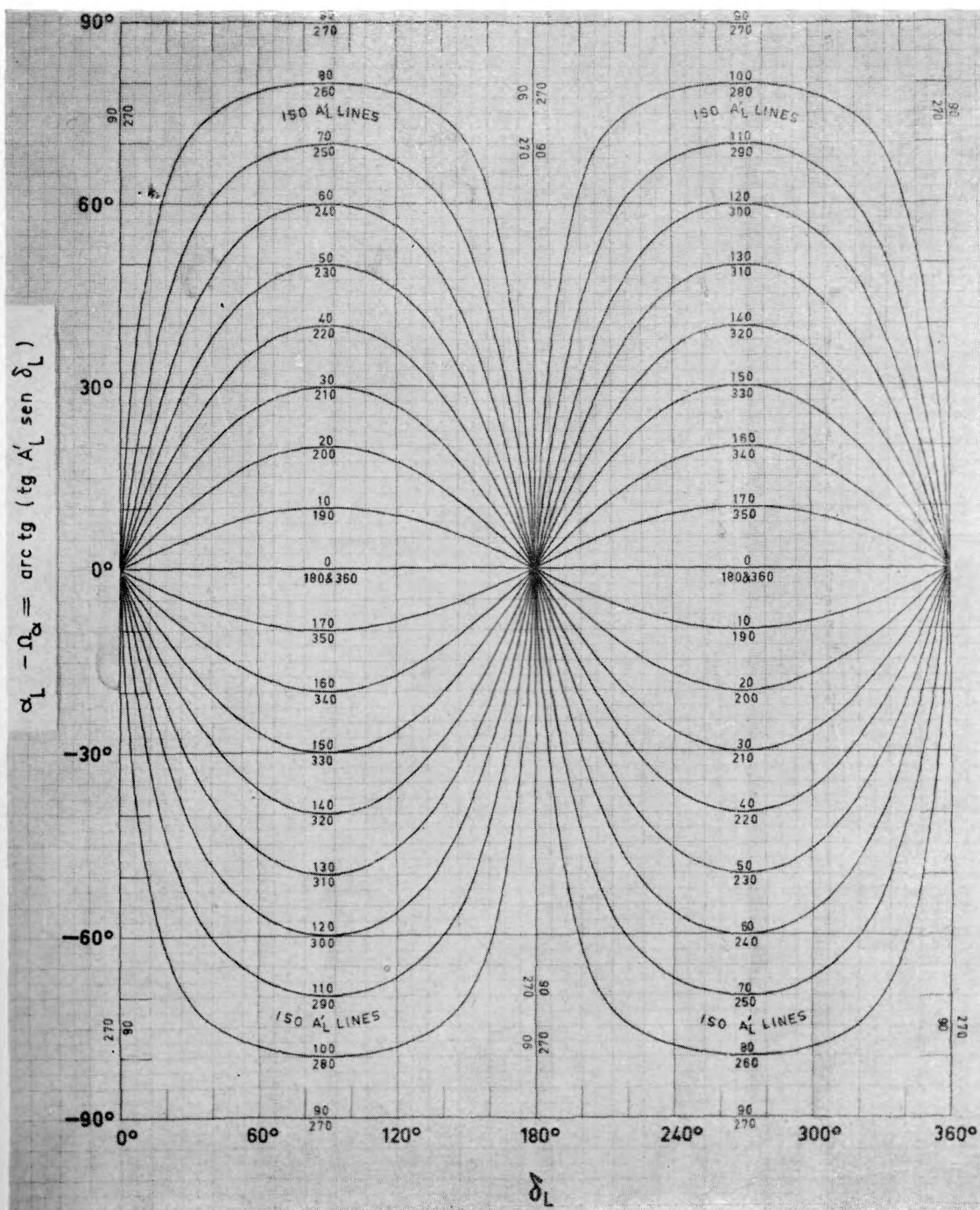


Figura 21.

y de la figura 41 de la Ref. 7 podemos estimar:

$$\alpha_L = \alpha_1 - 12^\circ = 297,9^\circ - 12^\circ = 285,9^\circ,$$

y

$$\alpha_T = 69,9^\circ$$

En nuestro caso podemos calcular de forma más exacta  $\partial_T$ , ya que conocemos exactamente el punto de inyección,  $A'_L$  y  $\Phi_b$ .

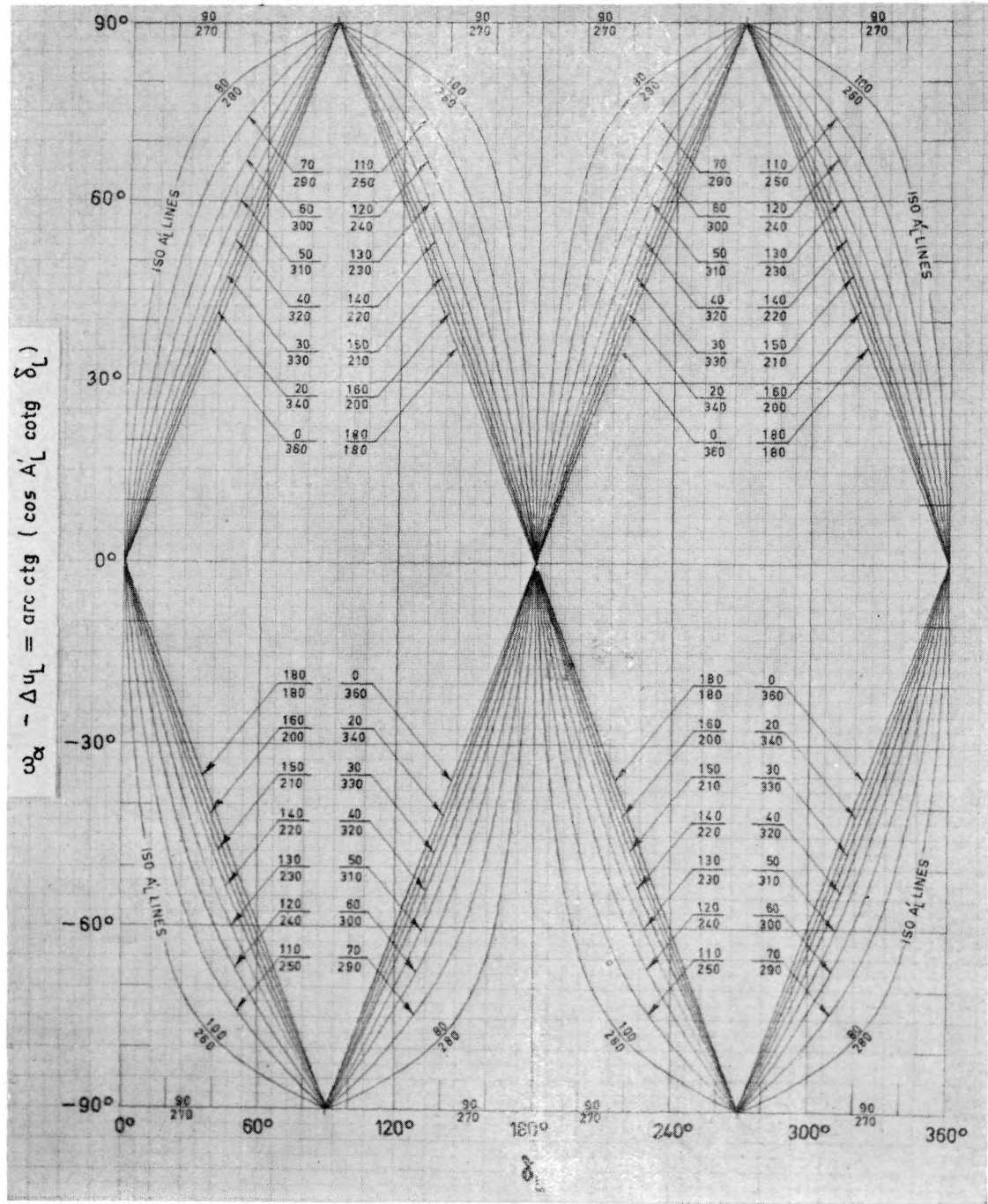


Figura 22.

Considerando el triángulo de vértices: el punto de inyección, el Polo Norte y la dirección radial exterior, obtenemos:

$$\delta_T = -21,5^\circ, \quad \alpha_T = 67^\circ.$$

Utilizando estos valores en la figura 4 obtenemos:

$$\delta_\varepsilon = -41,7^\circ \quad \alpha_\varepsilon = 59,2^\circ,$$

y

$$\lambda_\varepsilon = -\alpha_\varepsilon + \Sigma_\odot - 90^\circ = -159,5^\circ,$$

ya que  $\Sigma_\odot = -10,3^\circ$  el día del lanzamiento.

También:

$$v_a = V_A / V_\oplus = 0,081.$$

Con estas condiciones de inyección  $v_a$ ,  $\lambda_\varepsilon$ ,  $\delta_\varepsilon$  se obtienen los siguientes resultados con las teorías no linealizada y linealizada expuestas en este trabajo.

	No linealizada	Linealizada	Datos reales
$e$	0,128	0,115	0,104
$\tau$	313 <sup>d</sup>	302 <sup>d</sup>	311,6 <sup>d</sup>
$\theta_T$	-11,41°	-9°	-2,58°
$a/r_\oplus$	0,903	0,885	0,900
$\rho_D$	0,787	0,772	0,806
$\rho_a$	1,019	1,002	0,993
$i$	-3,27°	-3,08°	-3,35°
$\gamma$	-1,28°	-1,19°	—

## Referencias.

1. EHRLICHE, K. A.: *Space Flight. I. Environment and Celestial Mechanics*, pp. 117-123. Van Nostrand. New York, 1959.
2. HUSS, C. R.; H. A. HAMER and J. P. MAYER: "Parameter Study of Insertion Conditions for Lunar Missions Including Various Trajectory Considerations". NASA TR R-122, 1961.
3. LAGERSTROM, P. A., and J. KEVORKIAN: "Matched-Conic Approximation to the Two Fixed Force-Center Problem". *Astronm. J.*, vol. 68, núm. 2 pp. 84-92, mar. 1963.
4. LAGERSTROM, P. A., and J. KEVORKIAN: "Earth to Moon Trajectories in the Restricted Three-Body Problem". *J. de Mecanique* volume 2 n° 2, pp. 189-218, june 1963.
5. I. DA RIVA, E. FRAGA, A. LIÑÁN: "Sondas lunares". *Ing. Aeronáutica y Astronáutica*, núm. 80, páginas 19-35, nov.-dic. 1964.
6. THOMSON, W. T. *Introduction to Space Dynamics*, págs. 71-77. John Wiley. New York, 1961.
7. WOLVERTON, R. W.: *Flight Performance Handbook for orbital Operations*. John Wiley & Sons. New York, 1963, págs. G-50 a G-62.